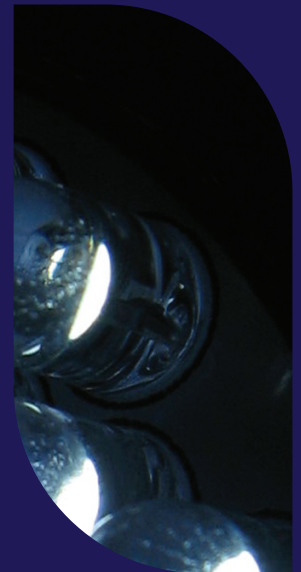


Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados

Pedro Infante Moreira

Tomo 1



ESPOCH
2016

**Análisis de circuitos eléctricos
en estado estable y circuitos acoplados**

Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados

Tomo 1

Pedro Infante Moreira



**Análisis de circuitos eléctricos
en estado estable y circuitos acoplados**

© 2015 Pedro Infante Moreira

© 2015 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*).

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados. Tomo 1.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

98 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-181-1

1. Circuitos eléctricos
2. Circuitos en estado estable
3. Circuitos acoplados
4. Electricidad
5. Magnetismo

CONTENIDO GENERAL

TOMO 1

Introducción	11
Capítulo 1. Análisis de circuitos	13
Introducción.....	13
1.1 Análisis de nodos.....	13
1.2 Supernodos.....	19
1.3 Análisis de mallas	26
1.4 Supermallas	34
1.5 Linealidad	40
1.6 Superposición.....	40
1.7 Transformación de fuentes	48
1.8 Divisor de voltaje.....	51
1.9 Divisor de corriente.....	53
1.10 Teorema de Thévenin.....	55
1.11 Teorema de Norton	60
1.12 Máxima transferencia de potencia.....	63
Capítulo 2. Fasores	67
2.1 Introducción.....	67
2.2. Las funciones senoidales.....	67
2.3 Funciones de excitación senoidales.....	71
2.4 La función de excitación compleja	76
2.5 El fasor.....	82
2.6 Relaciones fasoriales.....	84
2.6.1 Circuito resistivo	85
2.6.2 Circuito inductivo	87
2.6.3 Circuito capacitivo	91
2.6.4 Impedancia y admitancia	94
2.7 Diagramas fasoriales.....	96

TOMO 2

Capítulo III. Potencia promedio y valores eficaces	9
3.1 Potencia instantánea.....	9
3.2 Potencia promedio.....	16
3.3 Valores eficaces	23
3.4 Potencia aparente	27
3.5 Factor de potencia	27
3.6 Potencia compleja.....	28
3.7 Triángulo de potencia.....	33
3.8 Mejoramiento del factor potencia	36
3.9 Porcentaje de regulación de voltaje	41
Capítulo IV. Circuitos trifásicos	45
4.1 Generación de voltajes trifásicos.....	45
4.2 Conexión en estrella	46
4.3 Conexión en delta	47
4.4 Voltajes fasoriales	48
4.5 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella - estrella (Y-Y) incluyendo el neutro	52
4.6 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella - delta (Y- Δ)....	54
4.7 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en estrella (Y)..	56
4.8 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en delta (Δ) ..	58
Capítulo V. Circuitos acoplados magnéticamente.....	63
5.1 Autoinductancia	63
5.2 Inductancia mutua.....	64
5.3 Análisis de bobinas acopladas.....	64
5.4 Coeficiente de acoplamiento	70
5.5 Transformador ideal	73
Referencias	79
Bibliografía complementaria.....	79

CONTENIDO TOMO 1

Introducción	11
Capítulo 1. Análisis de circuitos	13
Introducción.....	13
1.1 Análisis de nodos.....	13
1.2 Supernodos.....	19
1.3 Análisis de mallas	26
1.4 Supermallas	34
1.5 Linealidad	40
1.6 Superposición.....	40
1.7 Transformación de fuentes	48
1.8 Divisor de voltaje.....	51
1.9 Divisor de corriente.....	53
1.10 Teorema de Thévenin.....	55
1.11 Teorema de Norton	60
1.12 Máxima transferencia de potencia.....	63
Capítulo 2. Fasores	67
2.1 Introducción.....	67
2.2. Las funciones senoidales.....	67
2.3 Funciones de excitación senoidales.....	71
2.4 La función de excitación compleja	76
2.5 El fasor.....	82
2.6 Relaciones fasoriales.....	84
2.6.1 Circuito resistivo	85
2.6.2 Circuito inductivo	87
2.6.3 Circuito capacitivo	91
2.6.4 Impedancia y admitancia	94
2.7 Diagramas fasoriales.....	96

INTRODUCCIÓN

La presente obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, geometría y trigonometría, con el único propósito de ayudarlos en el aprendizaje para resolver problemas de circuitos eléctricos.

El desarrollo de los cinco capítulos teóricos se basa en la experiencia del autor como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, tomando como base los argumentos teóricos de varios autores, especialmente, William H. Hayt, Jr. y Jack E. Kemmerly.

El libro *Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados* consta de cinco capítulos. El capítulo I comprende el análisis de los circuitos en corriente continua y estado estable, utilizando los métodos de análisis de nodos, análisis de mallas, divisores de corriente, divisores de voltaje, transformaciones de fuentes de corriente y de voltaje, superposición, teoremas de Thévenin y de Norton.

El capítulo II trata del análisis de los circuitos eléctricos en corriente alterna y en estado estable, usando los fasores para la resolución de los problemas y utilizando los diferentes métodos del capítulo I.

El capítulo III comprende el análisis de la potencia promedio y valores eficaces, referenciados a potencias bajas y medias, utilizando el triángulo de potencias para su resolución.

El capítulo IV se refiere al análisis de circuitos trifásicos con cargas balanceadas.

Finalmente, en el capítulo V, se contempla el análisis de circuitos acoplados magnéticamente y transformadores.

CAPÍTULO I

ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Introducción

Para este capítulo, es necesario que el estudiante haya practicado con circuitos simples y haya aprendido a aplicar las leyes fundamentales de los circuitos eléctricos. Ahora se analizarán circuitos más complejos. Con el aprendizaje de varios métodos, el estudiante desarrollará la habilidad para escoger el más adecuado para el análisis de una red eléctrica.

1.1 Análisis de nodos

En un circuito eléctrico, para realizar el análisis de nodos por asignación de potenciales, se procede a aplicar los pasos siguientes:

- a) Identificar y contabilizar el número de nodos (un nodo es un punto de conexión entre dos o más ramas).
- b) Escoger un nodo de referencia, preferentemente el nodo que tenga el mayor número de ramas. A este nodo de referencia se le asigna un potencial de cero voltios.
- c) A cada nodo, asignar un potencial positivo con respecto al nodo de referencia; de tal forma que la corriente que sale del nodo es positiva y la que entra al nodo es negativa.
- d) En el circuito eléctrico, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si todas las fuentes son de corriente, continuar con el paso f).
- e) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de voltaje, se forman supernodos (las fuentes de voltaje que se conectan entre un par de nodos hacen que estos terminales se conviertan en lo que se denomina un supernodo).

- f) En cada nodo, plantear una ecuación. Cuando se plantea la ecuación en un nodo, se asume que es de mayor potencial que los demás.

Ejemplo 1.1: Considérese el circuito de la figura 1.1a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 63).

Solución:

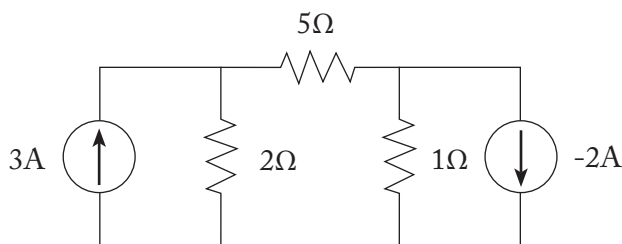


Figura 1.1 a Circuito con tres nodos

En el circuito de la figura 1.1a, aplicamos los pasos a), b), c), d), e) y f) de la siguiente forma:

- a) **Identificar y contabilizar el número de nodos.**

En la figura 1.1a, se identifican tres nodos; se puede redibujar este circuito para una mejor visualización y se asigna un número a cada nodo, tal como se muestra en la figura 1.1b.

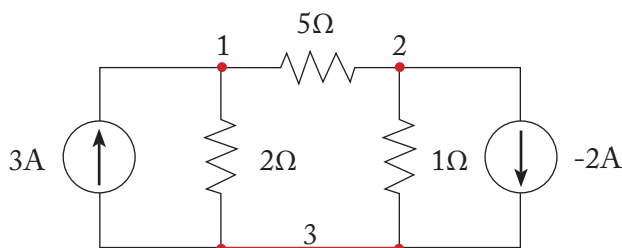


Figura 1.1 b El circuito se ha redibujado para hacer resaltar los tres nodos y, cada uno de ellos, se los enumera.

- b) Escoger un nodo de referencia, preferentemente el nodo que tenga el mayor número de ramas. A este nodo de referencia se le asigna un potencial de cero voltios.

Debido a que el voltaje es una diferencia de potencial entre dos puntos, se debe escoger un nodo de referencia, preferentemente el que tenga el mayor número de ramas, para simplificar el proceso; en este caso, al nodo 3 se le asigna como el nodo de referencia (figura 1.1c).

Se deben convertir las resistencias R en conductancias G (la conductancia es la facilidad que ofrece un material cualquiera al paso de la corriente eléctrica; la conductancia es lo opuesto a la resistencia). Pues: “La Ley de Ohm establece que la tensión entre los dos extremos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material” (Hayt Jr., *et al.*, 2012, p. 22), cuya fórmula es $V = Ri$, donde, V es la tensión o voltaje expresado en voltios, i es la corriente expresada en amperios y R es la resistencia del material expresada en ohmios (Ω).

De la ecuación de la Ley de Ohm, se despeja la corriente; entonces:

$$i = \frac{1}{R} V$$

$$\text{donde } G = \frac{1}{R}$$

reemplazando

$$i = GV$$

La fórmula $i = GV$ se aplica cuando se emplea el método de nodos con asignación de potenciales, siendo G la conductancia

y su unidad es el mho (\mathcal{U}). El circuito equivalente se encuentra representado en la figura 1.1c, en la cual a cada nodo se le asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia.

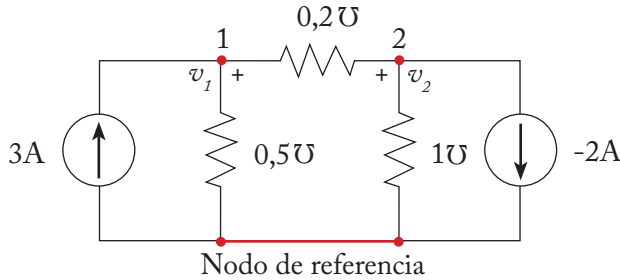


Figura 1.1 c. En cada nodo se define un voltaje positivo con respecto al nodo de referencia, incluyendo las polaridades.

- c) A cada nodo, asignar un potencial positivo con respecto al nodo de referencia; de tal forma que la corriente que sale del nodo es positiva y la que entra al nodo es negativa.

En la figura 1.1d, se simplifica el diagrama del circuito, eliminando todos los símbolos de referencia de los voltajes; en cada nodo se pone v_1, v_2 y, en el nodo de referencia, se reemplaza por Ref, que es igual a cero voltios.

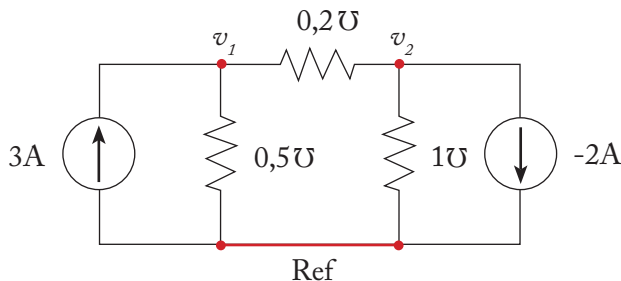


Figura 1.1 d. Finalmente, el circuito debe tener v_1, v_2 y Ref.

- d) En el circuito eléctrico, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si las fuentes son de corriente, continuar con el paso f).

En el circuito de la figura 1.1d, solo existen dos fuentes independientes de corriente (3A y -2A); por lo tanto, se continúa con el paso f).

- e) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de voltaje, se forman supernodos.

En el circuito de la figura 1.1d, no existen fuentes de voltaje, por lo tanto se continúa con el paso f).

- f) En cada nodo, plantear una ecuación. Cuando se plantea la ecuación en un nodo, se asume que es de mayor potencial que los demás.

En el circuito de la figura 1.1d, existen tres nodos (1, 2 y el nodo de referencia). Por lo tanto, se plantean las ecuaciones del nodo 1 y del nodo 2.

ECUACIÓN DEL NODO 1

En el nodo 1, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), considerando que este nodo se encuentra a mayor potencial que el nodo 2 y el de referencia; esto es, las corrientes que salen del nodo 1 son positivas y las corrientes que entran son negativas.

$$\begin{aligned} -3 + 0.5 v_1 + 0.2 (v_1 - v_2) &= 0 \\ -3 + 0.5 v_1 + 0.2 v_1 - 0.2 v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$0.7 v_1 - 0.2 v_2 = 3 \quad (1-1)$$

ECUACIÓN DEL NODO 2

En el nodo 2, se aplica la LCK, considerando que este nodo se encuentra a mayor potencial que el nodo 1 y el de referencia; esto es, las corrientes que salen del nodo 2 son positivas y las corrientes que entran son negativas.

$$\begin{aligned}0.2 (v_2 - v_1) + 1 (v_2 - 0) + (-2) &= 0 \\0.2 v_2 - 0.2 v_1 + v_2 - 2 &= 0 \\-0.2 v_1 + 1.2 v_2 &= 2\end{aligned}\tag{1-2}$$

De la ecuación (1-2), despejamos el voltaje v_1 .

$$\begin{aligned}0.2 v_1 &= 1.2 v_2 - 2 \\v_1 &= \frac{1.2 v_2 - 2}{0.2} = \frac{1.2}{0.2} v_2 - \frac{2}{0.2} = 6v_2 - 10 \\v_1 &= 6 v_2 - 10\end{aligned}\tag{1-3}$$

La ecuación (1-3) la reemplazamos en la ecuación (1-1).

$$\begin{aligned}0.7 (6 v_2 - 10) - 0.2 v_2 &= 3 \\4.2 v_2 - 7 - 0.2 v_2 &= 3 \\4 v_2 - 10 &= 0 \\v_2 &= \frac{10}{4} = 2.5 \\v_2 &= 2.5 \text{ V}\end{aligned}$$

Se reemplaza en la ecuación (1-3).

$$\begin{aligned}v_1 &= 6 (2.5) - 10 = 15 - 10 = 5 \\v_1 &= 5 \text{ V}\end{aligned}$$

1.2 Supernodos

Para el análisis de nodos, en el circuito solo debe haber fuentes de corriente para aplicar la LCK y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm. En el caso de que existan fuentes de voltaje, no hay forma de expresar la corriente en función del voltaje, ya que, en una fuente de voltaje, su valor es independiente de la corriente y depende de la potencia de la fuente; es decir, la corriente varía dependiendo de la carga que esté conectada al circuito y su valor varía hasta la potencia máxima que soporta la fuente. Como un ejemplo característico, considérese el circuito mostrado en la figura 1.2, en el cual se explica el supernodo.

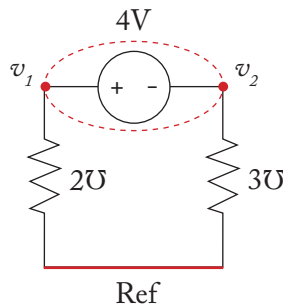


Figura 1.2. Supernodo formado por los nodos 1 y 2, encerrado por la línea punteada

Cuando en un circuito existen fuentes independientes y dependientes de voltaje, los dos nodos que contienen a la fuente de voltaje se consideran como un solo punto o nodo, el cual se denomina supernodo. Esto se puede hacer debido a que la corriente total que sale del nodo 1 es cero y lo mismo pasa con el nodo 2. Entonces, la corriente total que sale de ambos nodos también es cero. El supernodo se indica por la región sombreada encerrada por la línea punteada, tal como se indica en la figura 1.2, y se aplica la LCK simultáneamente en los dos nodos. A continuación, se plantea la ecuación del supernodo.

ECUACIÓN DEL SUPERNODO (formado por el nodo 1 y el nodo 2)

En la figura 1.2, el supernodo está formado por el nodo 1 y el nodo 2, considerando que estos dos nodos se encuentran a mayor potencial que el nodo de referencia; las corrientes que salen de los nodos 1 y 2 son positivas y las corrientes que entran son negativas. Aplicando la LCK en el supernodo formado por los nodos 1 y 2, tenemos:

$$2 v_1 + 3 v_2 = 0 \quad (1-4)$$

Como hay dos incógnitas, se necesita una ecuación adicional. Esta ecuación se la obtiene de la fuente de voltaje de 4V, que está formando el supernodo entre los nodos 1 y 2. El terminal positivo de la fuente está conectado al nodo 1 y el terminal negativo está conectado al nodo 2. Esto es:

$$v_1 - v_2 = 4 \quad (1-5)$$

Por lo tanto, existen dos ecuaciones con dos incógnitas (v_1 y v_2). Entonces, el sistema se puede resolver por cualquier método para encontrar los valores de v_1 y v_2 .

De la ecuación (1-5), despejamos v_1 y reemplazamos en la ecuación (1-4).

$$\begin{aligned} v_1 &= 4 + v_2 \\ 2(4 + v_2) + 3 v_2 &= 0 \\ 8 + 2 v_2 + 3 v_2 &= 0 \\ 5 v_2 &= -8 \end{aligned}$$

$$v_2 = 1.6 \text{ V}$$

Entonces,

$$v_I = 4 + (-1.6) = 2.4$$

$$v_I = 2.4 \text{ V}$$

Ejemplo 1.2: Utilícese el análisis de nodos para calcular los potenciales en cada uno de los nodos del circuito de la figura 1.3a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 110).

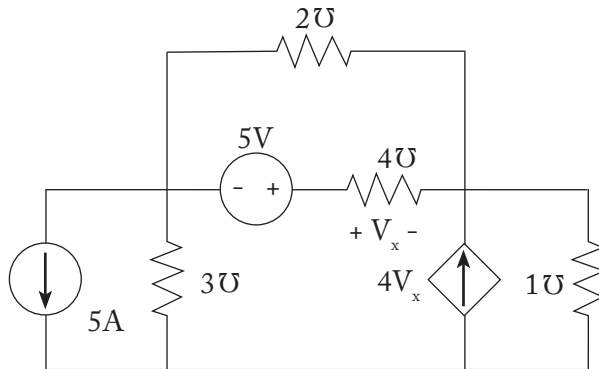


Figura 1.3a. Circuito con fuentes de voltaje y de corriente

Solución:

En el circuito de la figura 1.3a, aplicamos los pasos a), b), c), d), e) y f), de la siguiente forma:

a) **Identificar y contabilizar el número de nodos.**

En la figura 1.3a, se identifican cuatro nodos, y se asigna un número a cada nodo (figura 1.3b).

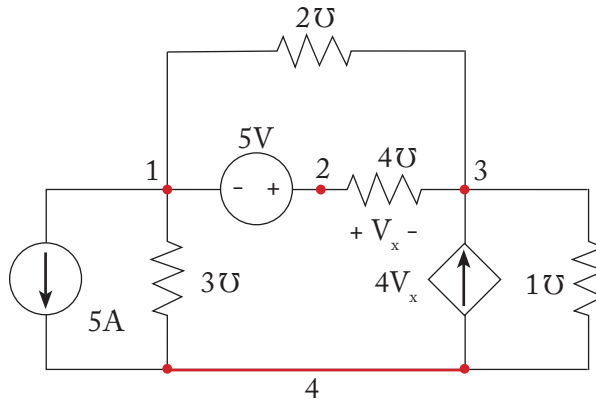


Figura 1.3b. Circuito con cuatro nodos

- b) Escoger un nodo de referencia, preferentemente el nodo que tenga el mayor número de ramas. A este nodo de referencia se le asigna un potencial de cero voltios.

Debido a que el voltaje es una diferencia entre dos puntos, se debe escoger un nodo de referencia, preferentemente el que tenga el mayor número de ramas, para simplificar el proceso; si todos tienen el mismo número de ramas, escoger de acuerdo con su criterio. En este caso, al nodo 4 se le asigna como nodo de referencia (figura 1.3c).

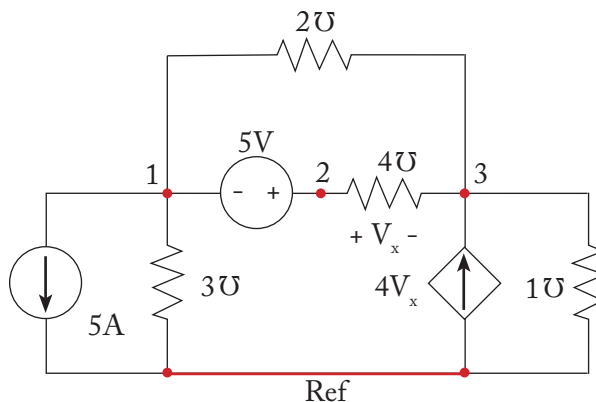


Figura 1.3c. Circuito con cuatro nodos

- c) A cada nodo, asignar un potencial positivo con respecto al nodo de referencia, de tal forma que la corriente que sale del nodo es positiva y la que entra al nodo es negativa.

La fórmula $i = GV$ se aplica cuando se emplea el método de nodos con asignación de potenciales, siendo G la conductancia y su unidad es el mho (\mathcal{U}). En el circuito de la figura 1.3d, a cada nodo se le asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia.

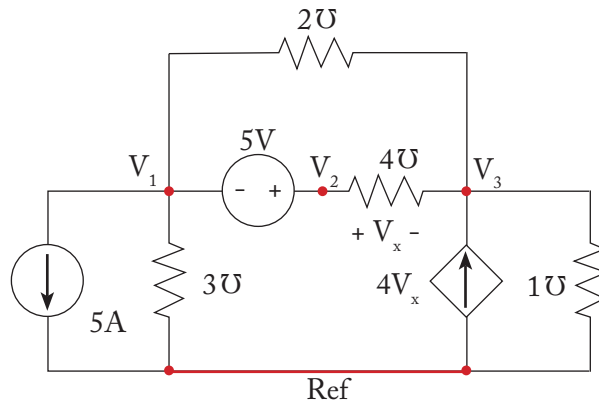


Figura 1.3d. A cada nodo se le asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia.

- d) En el circuito de la figura 1.3d, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si las fuentes son de corriente, continuar con el paso f).

En el circuito de la figura 1.3d, existe una fuente independiente de voltaje de 5 V, una fuente independiente de corriente de 5A y una fuente dependiente de corriente.

- e) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de voltaje, se forman supernodos.

En el circuito de la figura 1.3d, existe una fuente independiente de voltaje de 5V; por lo tanto, se forma un supernodo formado por los nodos 1 y 2, tal como se presenta en la figura 1.3e.

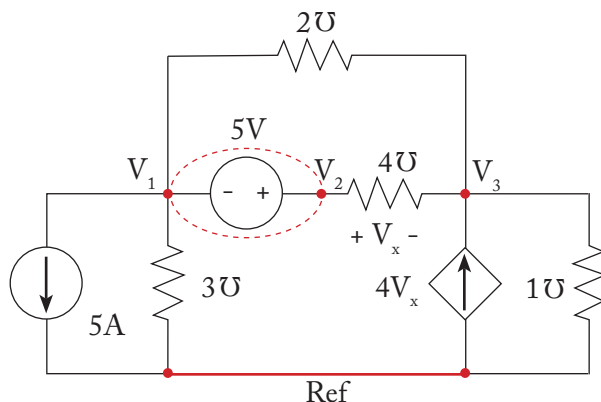


Figura 1.3e. La fuente de voltaje de 5V forma un supernodo entre los nodos 1 y 2.

- f) En cada nodo, plantear una ecuación. Cuando se plantea la ecuación en un nodo, este es de mayor potencial que los demás.

ECUACIÓN DEL NODO 3

Se asume que el nodo 3 es de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo, se tiene:

$$-4 V_x + 1 (V_3 - 0) + 4 (V_3 - V_2) + 2 (V_3 - V_1) = 0$$

$$V_x = V_2 - V_3$$

$$-4 (V_2 - V_3) + V_3 + 4 (V_3 - V_2) + 2(V_3 - V_1) = 0$$

$$-4 V_2 + 4 V_3 + V_3 + 4 V_3 - 4V_2 + 2V_3 - 2V_1 = 0$$

$$-2V_1 - 8V_2 + 11V_3 = 0 \tag{1-6}$$

ECUACIÓN DEL SUPERNODO

(formado por el nodo 1 y el nodo 2)

Se asume que los nodos 1 y 2 (los cuales forman el supernodo) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo, se tiene:

$$5 + 3(V_1 - 0) + 4(V_2 - V_3) + 2(V_1 - V_3) = 0$$

$$5 + 3V_1 + 4V_2 - 4V_3 + 2V_1 - 2V_3 = 0$$

$$5V_1 + 4V_2 - 6V_3 = -5 \quad (1-7)$$

En el supernodo, en la fuente de voltaje de 5V, el terminal positivo está unido al nodo 2 y el terminal negativo está unido al nodo 1. Se plantea la siguiente ecuación:

$$V_2 - V_1 = 5$$

Ordenando,

$$-V_1 + V_2 = 5 \quad (1-8)$$

Con las ecuaciones (1-6), (1-7) y (1-8), se plantea el sistema de determinantes para calcular el valor de V_1 .

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 0 & -8 & 11 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -2 & -8 & 11 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-5[(-8)(0)-1(11)]-4[(0)(0)-5(11)]-6[(0)(1)-5(-8)]}{5[(-8)(0)-1(11)]-4[(-2)(0)-(-1)(11)]-6[(-2)(1)-(-1)(-8)]}$$

$$V_1 = \frac{55 + 220 - 240}{-55 - 44 + 60} = \frac{35}{-39} = -0,89744$$

$$V_1 = -0.897V$$

De la ecuación (1-8), se despeja V_2 .

$$V_2 = 5 + V_1 = 5 + (-0.897) = 4.103$$

$$V_2 = 4.103 V$$

Reemplazando valores en la ecuación (1-6).

$$-2(-0.897) - 8(4.103) + 11V_3 = 0$$

$$1.794 - 32.824 + 11V_3 = 0$$

$$-31.03 + 11V_3 = 0$$

$$V_3 = \frac{31,03}{11} = 2,821$$

$$V_3 = 2.821 V$$

1.3 Análisis de mallas

En un circuito eléctrico, para realizar el análisis de mallas, se procede a aplicar los pasos siguientes:

- a) Identificar y contabilizar el número de mallas.
- b) A cada malla, se le asigna una corriente de malla y una dirección de la corriente a favor o en contra de las manecillas del reloj.
- c) En el circuito eléctrico, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si todas las fuentes son de voltaje, continuar con el paso e).

- d) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de corriente, se forman supermallas.
- e) En cada malla plantear una ecuación. Cuando en una malla se plantea la ecuación, la corriente de esa malla es la que va a polarizar de más a menos (+ a -) en todos los elementos pasivos de la malla.

Ejemplo 1.3: Considere el circuito de la figura 1.4a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 73).

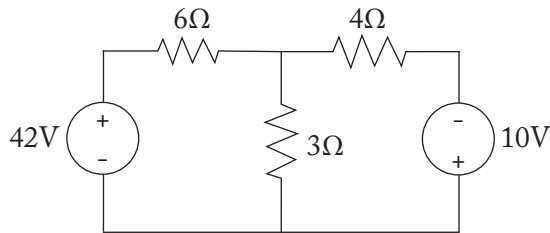


Figura 1.4a. Circuito solo con fuentes de voltaje

Solución:

En el circuito de la figura 1.4a, aplicamos los pasos a), b), c), d) y e), de la siguiente forma:

- a) **Identificar y contabilizar el número de mallas.**

En la figura 1.4a, se identifican dos mallas y se asigna un número romano a cada malla (malla I y malla II), tal como se muestra en la figura 1.4b.

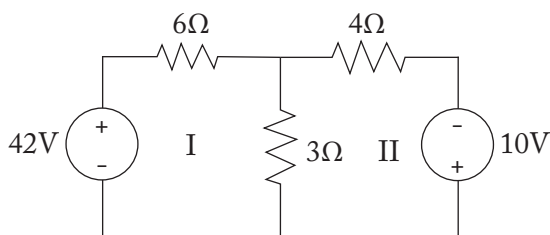


Figura 1.4b. Circuito con dos mallas (I y II)

- b) A cada malla se le asigna una corriente de malla y, además, una dirección de la corriente a favor o en contra de las manecillas del reloj.

A cada malla se le asigna una corriente de malla i_1 e i_2 , en sentido de las manecillas del reloj. Se define una *corriente de malla* como aquella que circula solo alrededor del perímetro de una malla. Considerando la malla I, el perímetro está integrado por los elementos de 42V, 6Ω y 3Ω . Considerando la malla II, el perímetro está integrado por los elementos de 3Ω , 4Ω y 10V. Una corriente de malla se indica por medio de una flecha curva, que casi se encierra sobre sí misma, tal como se muestra en la figura 1.4c.

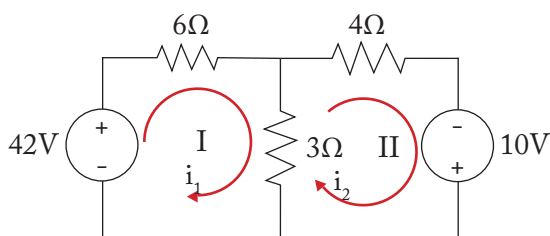


Figura 1.4c. Asignación de las corrientes de malla i_1 e i_2

- c) En el circuito eléctrico, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si todas las fuentes son de voltaje, continuar con el paso e).

En el circuito de la figura 1.4c, solo existen fuentes de voltaje; por lo tanto, se continúa con el paso e).

- d) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de corriente, se forman supermallas.

En el circuito de la figura 1.4c, no existen fuentes de corriente, por lo tanto se continúa con el paso e).

- e) En cada malla, plantear una ecuación. Cuando se plantea la ecuación en una malla, su corriente es la que va a polarizar de más a menos (+ a -) en todos los elementos pasivos de la malla.

Para una mejor comprensión, en el circuito de la figura 1.4c asignamos los nodos A y B (figura 1.4d) y se plantean las dos ecuaciones de malla.

ECUACIÓN DE LA MALLA I

Se asume que la corriente de malla i_1 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_1 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. La corriente i_1 , al pasar por la resistencia de 6Ω , polariza de más (+) a menos (-) asignándole un potencial de V_1 . La corriente i_1 , al pasar por la resistencia de 3Ω , polariza de más (+) a menos (-) asignándole un potencial de V_2 tal como se muestra en el circuito de la figura 1.4d.

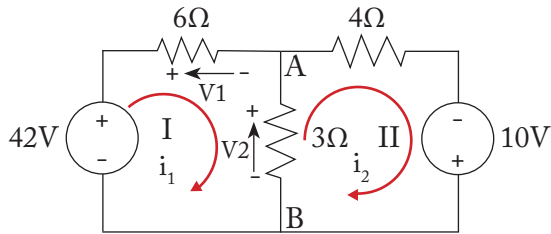


Figura 1.4d. La corriente de malla i_1 polariza positivamente a todos los elementos pasivos (resistencias de 3Ω y 6Ω).

Debido a que por la resistencia de 3Ω circulan dos corrientes de malla i_1 e i_2 (figura 1.4e), la corriente i_1 es positiva y la corriente i_2 es negativa, ya que esta se encuentra en dirección inversa a la corriente de polarización i_1 ; el voltaje entre los nodos A y B es:

$$V2 = 3 (i_1 - i_2)$$

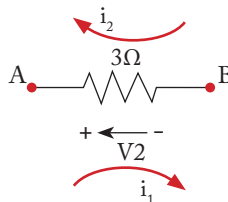


Figura 1.4e. Al considerar la malla I, la corriente i_1 polariza de + a - a la resistencia de 3, y el potencial entre los nodos A y B es: $V_{AB} = V2 = 3 (i_1 - i_2)$.

A continuación, en la malla I, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK).

$$-42 + V1 + V2 = 0$$

Aplicando la Ley de Ohm tenemos:

$$V1 = 6 i_1 ; V2 = 3 (i_1 - i_2)$$

Se reemplaza valores,

$$\begin{aligned} -42 + 6 i_1 + 3 (i_1 - i_2) &= 0 \\ -42 + 6 i_1 + 3 i_1 - 3 i_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$9 i_1 - 3 i_2 = 42 \quad (1-9)$$

ECUACIÓN DE LA MALLA II

Se asume que la corriente de malla i_2 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_2 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. La corriente i_2 , al pasar por la resistencia de 4Ω , polariza de más (+) a menos (-) asignándole un potencial de V_4 . La corriente i_2 , al pasar por la resistencia de 3Ω , polariza de más (+) a menos (-) asignándole un potencial de V_3 ; tal como se muestra en el circuito de la figura 1.4f.

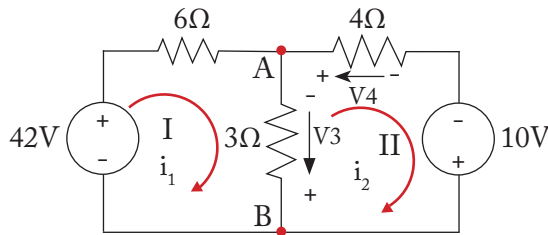


Figura 1.4f. La corriente de malla i_2 polariza positivamente a todos los elementos pasivos (resistencias de 3Ω y 4Ω).

Debido a que por la resistencia de 3Ω circulan dos corrientes de malla i_1 e i_2 (figura 1.4g), la corriente i_2 es positiva y la corriente i_1 es negativa, ya que esta se encuentra en dirección inversa a la corriente de polarización i_2 ; el voltaje entre los nodos A y B es:

$$V_3 = 3 (i_2 - i_1)$$

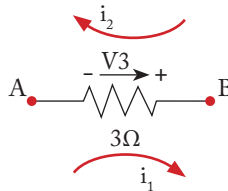


Figura 1.4g. Al considerar la malla II, la corriente i_2 polariza de + a - en la resistencia de 3Ω , y el potencial entre los nodos A y B es $V_{BA} = V_3 = 3 (i_2 - i_1)$.

A continuación, en la malla II, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK).

$$V_3 + V_4 - 10 = 0$$

Aplicando la ley de Ohm tenemos:

$$V_4 = 4i_2 \quad ; \quad V_3 = 3 (i_2 - i_1)$$

Reemplazando valores,

$$3 (i_2 - i_1) + 4 i_2 - 10 = 0$$

$$3 i_2 - 3i_1 + 4 i_2 - 10 = 0$$

$$-3 i_1 + 7 i_2 = 10 \tag{1-10}$$

De la ecuación (1-10),

$$-3i_1 = 10 - 7 i_2$$

$$i_1 = \frac{7i_2 - 10}{3} = \frac{7}{3}i_2 - \frac{10}{3} = 2,333i_2 - 3,333$$

$$i_1 = 2.333 i_2 - 3.333 \tag{1-11}$$

La ecuación (1-11) se reemplaza en la ecuación (1-9),

$$9 (2.333 i_2 - 3.333) - 3 i_2 = 42$$

$$20.997 i_2 - 29.997 - 3 i_2 = 42$$

$$17.997 i_2 = 71.997$$

$$i_2 = \frac{71,997}{17,997} = 4,0005$$

$$i_2 = 4.001 \text{ A}$$

En la ecuación (1-11),

$$i_1 = 2.333 (4.001) - 3.333 = 9.334 - 3.333 = 6.001$$

$$i_1 = 6 \text{ A}$$

Cuando se está resolviendo un problema por el método de análisis de mallas, no es necesario poner el signo de polarización en el circuito, únicamente se lleva en mente que, al pasar la corriente de malla por un elemento pasivo, esta corriente polariza de más (+) a menos (-). A continuación, se plantean las ecuaciones de malla en forma simplificada y es la que se utiliza siempre.

ECUACIÓN DE LA MALLA I

En el circuito de la figura 1.4c, se asume que la corriente de malla i_1 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_1 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-42 + 6 i_1 + 3 (i_1 - i_2) = 0$$

$$-42 + 6 i_1 + 3 i_1 - 3 i_2 = 0$$

$$9 i_1 - 3 i_2 = 42 \tag{1-12}$$

ECUACIÓN DE LA MALLA II

En el circuito de la figura 1.4c, se asume que la corriente de malla i_2 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_2 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo se aplica la Ley de Ohm.

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

$$3i_2 - 3i_1 + 4i_2 - 10 = 0$$

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \quad (1-13)$$

Finalmente, para calcular los valores de las corrientes i_1 e i_2 , se utiliza cualquier método.

1.4 Supermallas

Cuando en un circuito eléctrico existen fuentes de corriente independientes y/o fuentes de corriente dependientes, pueden formar supermallas.

Ejemplo 1.4: Considere el circuito de la figura 1.5a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 76).

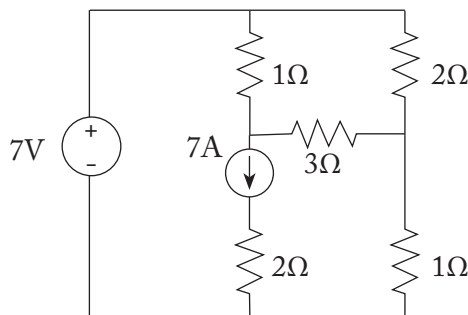


Figura 1.5a

Solución:

En el circuito de la figura 1.5a, se procede a aplicar todos los pasos del análisis de mallas, de la forma siguiente:

- a) **Identificar y contabilizar el número de mallas.**

En la figura 1.5a, se identifica tres mallas y se asigna un número romano a cada una (malla I, malla II y malla III), tal como se muestra en la figura 1.5b.

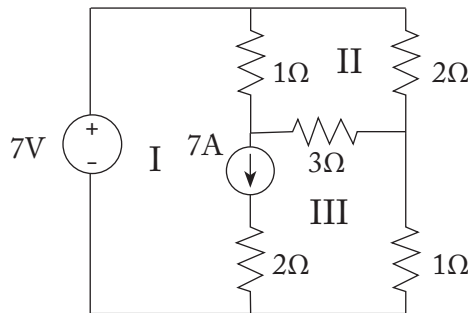


Figura 1.5b. En el circuito se identifican tres mallas (I, II y III).

- b) **A cada malla, se le asigna una corriente de malla y una dirección de la corriente a favor o en contra de las manecillas del reloj.**

En la figura 1.5b, a cada malla se le asigna una corriente de malla i_1 , i_2 e i_3 y se le da una dirección —todas a favor de las manecillas del reloj—, tal como se muestra en la figura 1.5c.

Es necesario aclarar que la dirección de las corrientes se pueden dar a favor o en contra de las manecillas del reloj. Para resolver un problema, todas las corrientes pueden estar a favor de las manecillas del reloj, también todas las corrientes pueden estar en contra de las manecillas del reloj o unas pueden estar a favor y otras en contra; es decir, pueden estar asignadas direcciones combinadas.

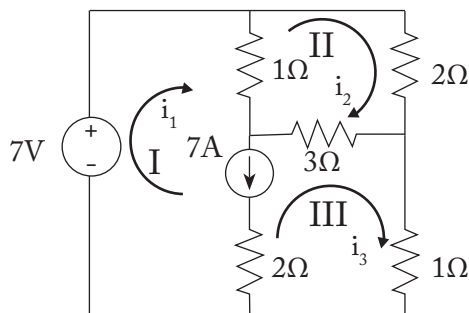


Figura 1.5c. A cada malla se asignan corrientes de malla (i_1 , i_2 e i_3).

- c) En el circuito eléctrico, chequear las fuentes independientes y dependientes, tanto de voltaje como de corriente. Si todas las fuentes son de voltaje, continuar con el paso e).

En el circuito de la figura 1.5c, existe una fuente de voltaje y una fuente de corriente. Debido a la fuente de corriente, se continúa con el paso del literal d).

- d) Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes de corriente, se forman supermallas.

En el circuito de la figura 1.5c, existe una fuente independiente de corriente de 7A; por lo tanto, si en un circuito existe una fuente de corriente, esta se abre, para denotar que una fuente está abierta. En los puntos A y B de la fuente, se pone una equis (X) tal como se muestra en la figura 1.5d.

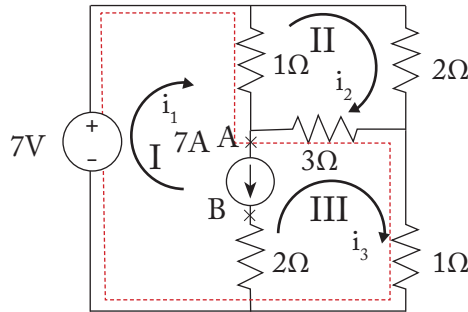


Figura 1.5d. La fuente de corriente se abre en los puntos A y B formando una supermalla entre las mallas I y III, indicado por las líneas punteadas.

Debido a la fuente de corriente que está abierta, las mallas I y III quedan abiertas y se genera, en este caso, una supermalla formada por las mallas I y III, que se indica con las líneas punteadas.

Se debe hacer una aclaración, el hecho de que una fuente de corriente independiente o dependiente se abra, no necesariamente forma una supermalla. Suponiendo que en el circuito de la figura 1.5d en vez de la fuente de voltaje (7V) hubiese sido una fuente de corriente, en ese caso las dos fuentes de corriente se abren y no forman ninguna supermalla, ya que las dos mallas quedan abiertas.

- e) En cada malla, plantear una ecuación. Cuando en una malla se plantea la ecuación, la corriente de esa malla es la que va a polarizar de más a menos (+ a -) en todos los elementos pasivos del circuito.

En el circuito de la figura 1.5d se plantean las ecuaciones de malla.

ECUACIÓN DE LA MALLA II

En el circuito de la figura 1.5d, se asume que la corriente de malla i_2 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_2 , se suman, y si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo se aplica la Ley de Ohm.

$$\begin{aligned}1 (i_2 - i_1) + 2i_2 + 3 (i_2 - i_3) &= 0 \\i_2 - i_1 + 2i_2 + 3 i_2 - 3i_3 &= 0 \\- i_1 + 6i_2 - 3i_3 &= 0\end{aligned}\tag{1-14}$$

ECUACIÓN DE LA SUPERMALLA (formada por las mallas I y III)

En el circuito de la figura 1.5d, en la supermalla formada por las mallas I y III, se asume que las corrientes de mallas i_1 e i_3 polarizan de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_1 e i_3 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo se aplica la Ley de Ohm.

$$\begin{aligned}-7 + 1 (i_1 - i_2) + 3 (i_3 - i_2) + 1i_3 &= 0 \\-7 + i_1 - i_2 + 3 i_3 - 3i_2 + i_3 &= 0 \\i_1 - 4 i_2 + 4 i_3 &= 7\end{aligned}\tag{1-15}$$

En la fuente de 7A, circulan dos corrientes de malla i_1 e i_3 . La corriente de malla que tiene la misma dirección de la flecha de la fuente de 7 A es positiva, caso contrario es negativa; esto es,

$$i_1 - i_3 = 7\tag{1-16}$$

Con las ecuaciones (1-14), (1-15) y (1-16), se plantea un sistema de determinantes para calcular el valor de la corriente i_3 .

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1[7(-4) - 0] - 6[1(7) - 1(7)] + 0}{-1[(-4)(-1) - 0] - 6[1(-1) - 1(4)] - 3[0 - (-4)(1)]}$$

$$i_3 = \frac{28 + 0 + 0}{-4 + 30 - 12} = \frac{28}{14} = 2A$$

En la ecuación (1-16),

$$\begin{aligned} i_1 - (2) &= 7 \\ i_1 &= 7 + 2 = 9A \end{aligned}$$

En la ecuación (1-14),

$$\begin{aligned} -(9) + 6 i_2 - 3 (2) &= 0 \\ -9 + 6 i_2 - 6 &= 0 \\ 6 i_2 &= 15 \end{aligned}$$

$$i_2 = \frac{15}{6} = 2,5A$$

Entonces,

$$i_1 = 9A; \quad i_2 = 2.5A; \quad i_3 = 2A$$

1.5 Linealidad

Toda ecuación de primer orden es lineal, es decir, las variables en una ecuación tienen el exponente igual a uno. Una ecuación lineal tiene una o más variables elevada a la potencia 1, que no tiene productos entre variables, es decir, es un polinomio de primer grado que está compuesto de sumas y restas. Por ejemplo:

$V_1 = 2 i_1 + 5 i_2$ es lineal, ya que está compuesta por variables de grado uno o potencia 1 que no se escribe.

$V_2 = 0.8 i_1^2$ no es lineal, ya que está compuesta por una variable de segundo grado o potencia 2.

$V_3 = 0.8 i_1 v_2$ no es lineal, ya que se multiplica por dos variables.

1.6 Superposición

El principio de superposición se aplica, siempre y cuando el circuito sea lineal, es decir, el sistema de ecuaciones sea lineal. Establece que la respuesta total de una variable de voltaje o de corriente, en cualquier parte de un circuito lineal, es la suma de varias respuestas parciales. El número de respuestas parciales es igual al número de fuentes independientes de voltaje o de corriente.

Para aplicar superposición, se siguen los pasos siguientes:

- a) Asegurarse de que el circuito sea lineal.
- b) Identificar la incógnita que se va a calcular, la misma que puede ser corriente y/o voltaje.
- c) Contabilizar el número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente. El número de respuestas parciales es igual al número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente.
- d) Para obtener una respuesta parcial, que puede ser de voltaje y/o de corriente, en el circuito actúa una sola fuente independiente de voltaje y/o de corriente; las demás fuentes independientes

de voltaje y/o de corriente se hacen cero. Hacer cero una fuente de voltaje equivale a un cortocircuito y hacer cero una fuente de corriente equivale a un circuito abierto. Para sacar el resto de respuestas parciales, se repite el proceso.

- e) La respuesta total es igual a la sumatoria de todas las respuestas parciales. Por ejemplo, si la incógnita que se va a calcular es x , entonces, la respuesta total es:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i$$

Ejemplo 1.5: Dado el circuito de la figura 1.6a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 81), hallar la corriente i_x , usando el principio de superposición.

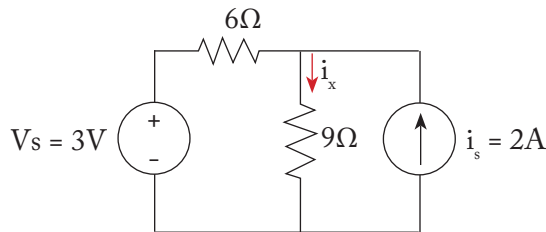


Figura 1.6a. El circuito contiene una fuente independiente de corriente y una fuente independiente de voltaje.

Solución:

Para calcular la corriente i_x por superposición, se siguen los pasos siguientes:

- a) **Asegurarse de que el circuito sea lineal.**

El circuito de la figura 1.6a es lineal (los circuitos en corriente continua son lineales, se plantean ecuaciones de grado uno).

- b) Identificar la incógnita que se va a calcular, la misma que puede ser corriente y/o voltaje.

La incógnita que se va a calcular es la corriente i_x .

- c) Contabilizar el número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente. El número de respuestas parciales es igual al número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente.

Existe una fuente independiente de voltaje y una fuente independiente de corriente, es decir, en total, existen dos fuentes independientes; razón por la cual existen también dos respuestas parciales (i_{x1} e i_{x2}).

- d) En el circuito actúa una sola fuente independiente de voltaje o de corriente para obtener una respuesta parcial, que puede ser de voltaje y/o de corriente; las demás fuentes independientes de voltaje y/o de corriente se hacen cero. Hacer cero una fuente de voltaje equivale a un cortocircuito; y hacer cero una fuente de corriente equivale a un circuito abierto. Para sacar el resto de respuestas parciales, se repite el proceso.

Cuando actúa la fuente de voltaje (V_s), la fuente de corriente i_s se hace cero (circuito abierto); se calcula una corriente parcial i_{x1} . El circuito se encuentra en la figura 1.6b.

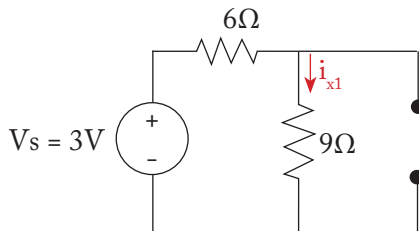


Figura 1.6b. En el circuito actúa la fuente V_s y la fuente $i_s = 0$ se obtiene una respuesta parcial i_{x1} .

En el lazo de la izquierda del circuito de la figura 1.6b, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$\begin{aligned} -3 + 6 i_{x1} + 9 i_{x1} &= 0 \\ 15 i_{x1} &= 3 \end{aligned}$$

$$i_{x1} = \frac{3}{15} = 0,2A$$

$$i_{x1} = 0.2A$$

Cuando actúa la fuente independiente de corriente i_s , la fuente de voltaje se hace cero (cortocircuito); se calcula una respuesta parcial i_{x2} . El circuito se encuentra en la figura 1.6c. En el nodo A, se aplica divisor de corriente.

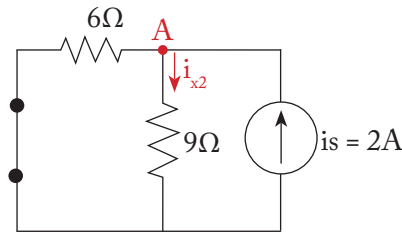


Figura 1.6c. En el circuito actúa la fuente i_s y la fuente de voltaje $V_s = 0$, se obtiene una respuesta parcial i_{x2} .

$$i_{x2} = i_s \frac{6}{6 + 9} = 2 \frac{6}{6 + 9} = \frac{12}{15} = 0,8A$$

$$i_{x2} = 0.8A$$

- e) La respuesta total es igual a la sumatoria de todas las respuestas parciales.

La respuesta total de la corriente i_x es la suma de las dos respuestas parciales, esto es,

$$\begin{aligned}i_x &= i_{x1} + i_{x2} \\i_x &= 0.2 + 0.8 = 1A\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6: Dado el circuito de la figura 1.7a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 82), calcular la corriente i_x , utilizando el principio de superposición.



Figura 1.7a. En este circuito, se aplica el principio de superposición, sustituyendo primero la fuente de 3A por un circuito abierto, y luego reemplazando la fuente de 10V por un cortocircuito. La fuente dependiente de voltaje siempre está activa (a menos que $i_x = 0$).

Solución:

Para el desarrollo de este problema, se siguen los pasos a), b), c), d) y e); esto es:

- a) **Asegurarse de que el circuito sea lineal.**

El circuito de la figura 1.7a es lineal (los circuitos en corriente continua son lineales, se plantean ecuaciones de grado uno).

- b) **Identificar la incógnita que se va a calcular, la misma que puede ser corriente y/o voltaje.**

La incógnita que se va a calcular es la corriente i_x .

- c) Contabilizar el número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente. El número de respuestas parciales es igual al número de fuentes independientes de voltaje y/o de corriente.

Existe una fuente independiente de voltaje de 10V y una fuente independiente de corriente de 3A; es decir, en total, existen dos fuentes independientes. Por esta razón existen también dos respuestas parciales (i_{x1} e i_{x2}).

- d) Para obtener una respuesta parcial, que puede ser de voltaje y/o de corriente, en el circuito actúa una sola fuente independiente de voltaje y/o de corriente; las demás fuentes independientes de voltaje y/o de corriente se hacen cero. Hacer cero una fuente de voltaje equivale a un cortocircuito y hacer cero una fuente de corriente equivale a un circuito abierto. Para sacar el resto de respuestas parciales, se repite el proceso.

Cuando actúa la fuente independiente de voltaje de 10V, la fuente de corriente de 3A se hace cero (circuito abierto). El circuito se encuentra representado en la figura 1.7b.

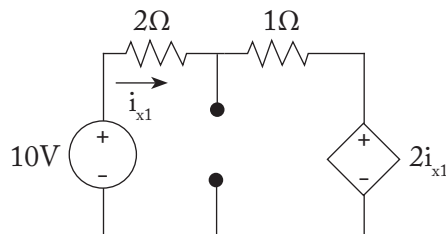


Figura 1.7b. Superposición. Actúa la fuente de voltaje y se hace cero la fuente de corriente de 3A.

En el circuito de la figura 1.7b, en el lazo externo, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-10 + 2i_{x1} + 1i_{x1} + 2i_{x1} = 0$$

$$-10 + 5i_{x1} = 0$$

$$5i_{x1} = 10$$

$$i_{x1} = \frac{10}{5} = 2A$$

Cuando actúa la fuente independiente de corriente de 3A, la fuente de voltaje de 10V se hace cero (cortocircuito). El circuito se encuentra representado en la figura 1.7c. Utilizando el análisis de mallas, la fuente de corriente se abre y se forma una supermalla entre las mallas I y II. A continuación, se plantea las ecuaciones de mallas.

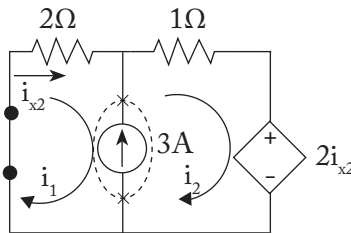


Figura 1.7c. Superposición. Actúa la fuente de 3A y se hace cero (cortocircuito) la fuente de voltaje de 10V

SUPERMALLA

En el circuito de la figura 1.7c, en la supermalla formada por las mallas I y II, se asume que las corriente de mallas i_1 e i_2 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. A continuación, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo, se aplica la Ley de Ohm.

$$2i_1 + 1i_2 + 2i_{x2} = 0$$

$$i_{x2} = i_1$$

$$2i_1 + i_2 + 2i_1 = 0$$

$$4i_1 + i_2 = 0 \quad (1-17)$$

Por la fuente de corriente de 3 A, circulan dos corrientes (i_1 e i_2).

$$i_2 - i_1 = 3$$

$$i_2 = 3 + i_1 \quad (1-18)$$

La ecuación (1-18) se reemplaza en la ecuación (1-17).

$$4i_1 + 3 + i_1 = 0$$

$$5i_1 = -3$$

$$i_1 = -\frac{3}{5} = -0,6A$$

$$i_{x2} = i_1 = -0.6A$$

- e) La respuesta total es igual a la sumatoria de todas las respuestas parciales.

La respuesta total de la corriente i_x , es la suma de las dos respuestas parciales; esto es:

$$i_x = i_{x1} + i_{x2}$$

$$i_x = 2 + (-0.6) = 1.4A$$

$$i_x = 1.4A$$

1.7 Transformación de fuentes

Se pueden intercambiar fuentes de voltaje o de corriente sin afectar al resto del circuito. Tales fuentes recibirán el nombre de fuentes equivalentes. Estos métodos serán aplicables tanto a fuentes independientes como a fuentes dependientes. La fuente real de voltaje tiene una resistencia interna R_s , que se encuentra conectada en serie con la fuente V_s . Este circuito está representado en la figura 1.8.

En el circuito de la figura 1.8 se aplica la LVK.

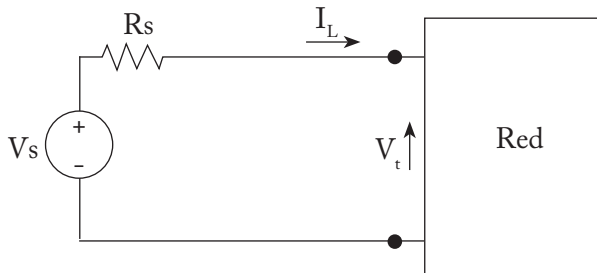


Figura 1.8. Circuito equivalente de una fuente real de voltaje

$$-V_s + R_s I_L + V_t = 0$$

$$-\frac{V_s}{R_s} + \frac{R_s I_L}{R_s} + \frac{V_t}{R_s} = 0$$

$$-\frac{V_s}{R_s} + I_L + \frac{V_t}{R_s} = 0$$

$$I_L = \frac{V_s}{R_s} - \frac{V_t}{R_s}$$

$$\frac{V_s}{R_s} = I_s = \text{fuente de corriente}$$

$$I_L = I_S - \frac{V_t}{R_S} \quad (1-19)$$

Una fuente real de corriente está representada por una fuente de corriente I_S y una resistencia R_S conectado en paralelo, cuyo circuito equivalente se encuentra representado en la figura 1.9.

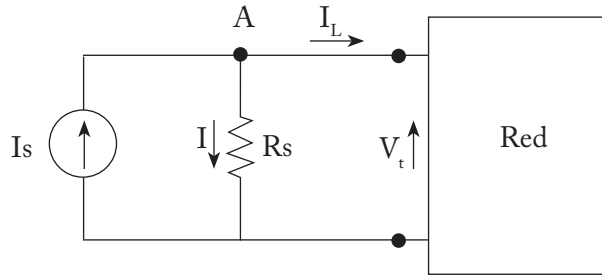


Figura 1.9. Circuito equivalente de una fuente real de corriente

En el circuito de la figura 1.9, en el nodo A, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK), considerando que las corrientes que entran al nodo se les asigna un signo positivo (+) y a las que salen del nodo se les asigna un signo negativo (-).

$$I_S - I - I_L = 0$$

$$I_L = I_S - I$$

$$I = \frac{V_t}{R_S}$$

$$I_L = I_S - \frac{V_t}{R_S} \quad (1-20)$$

La ecuación (1-19) es igual a la ecuación (1-20), entonces, concluimos que la fuente real de voltaje es igual a la fuente real de corriente, tal como se muestra en la figura 1.10.

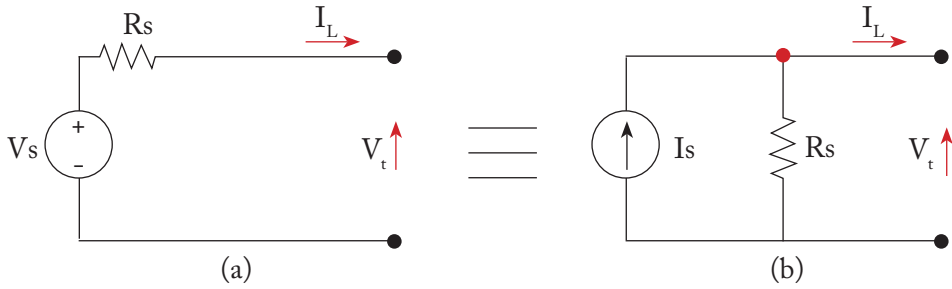


Figura 1.10. La fuente de voltaje (a) es equivalente a la fuente de corriente (b)

Ejemplo 1.7: Dada una fuente de corriente (figura 1.11a), transformar a una fuente real de voltaje.

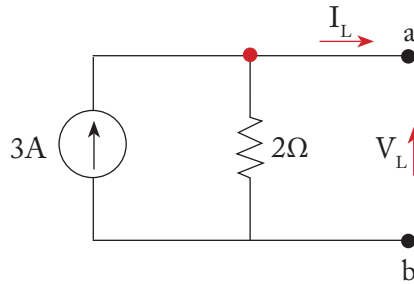


Figura 1.11a. Fuente real de corriente

Solución:

Con los datos del circuitito de la figura 1.11a ($I_s = 3A$, $R_s = 2$), se calcula el valor de la fuente de voltaje V_s . El circuito equivalente de la fuente de voltaje se encuentra en la figura 1.11b.

$$V_s = R_s I_s$$

$$V_s = (2) (3) = 6V$$

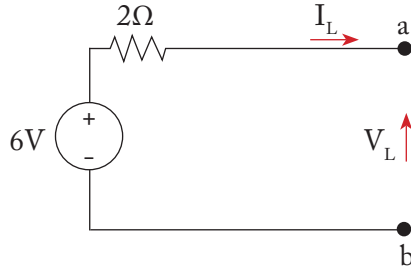


Figura 1.11b. Fuente real de voltaje

1.8 Divisor de voltaje

El divisor de voltaje se aplica únicamente en un circuito serie (la corriente es la misma), tal como se muestra en la figura 1.12. Procedemos a deducir las fórmulas de los voltajes V_1 , V_2 y V_3 .

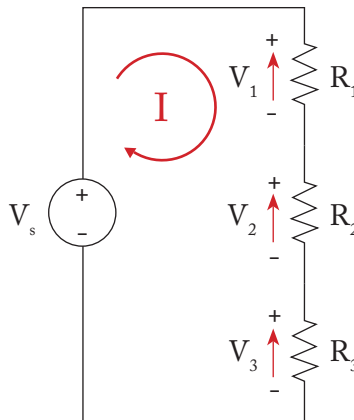


Figura 1.12. Circuito serie con tres resistencias y una fuente de voltaje

En la figura 1.12, aplicamos la LVK:

$$-V_s + V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

$$V_s = V_1 + V_2 + V_3$$

Se aplica la Ley de Ohm.

$$V_1 = R_1 I$$

$$V_2 = R_2 I$$

$$V_3 = R_3 I$$

Se reemplaza.

$$V_s = R_1 I + R_2 I + R_3 I$$

$$V_s = I (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\frac{V_s}{I} = R_1 + R_2 + R_3 = R_{eq}$$

$$I = \frac{V_s}{R_{eq}}$$

Es necesario que se pueda calcular los voltajes V_1 , V_2 y V_3 en cada una de las resistencias.

$$V_1 = R_1 I = R_1 \frac{V_s}{R_{eq}}$$

$$V_1 = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1-21)$$

$$V_2 = R_2 I = R_2 \frac{V_s}{R_{eq}}$$

$$V_2 = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1-22)$$

$$V_3 = R_3 I = R_3 \frac{V_s}{R_{eq}}$$

$$V_3 = V_s \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1-23)$$

Entonces, cuando se trate de n resistencias, la fórmula general será:

$$V_n = V_s \frac{R_n}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

En conclusión, para calcular los voltajes V_1 , V_2 y V_3 utilizando divisor de voltaje, únicamente se aplican directamente las ecuaciones (1-21), (1-22) y (1-23).

1.9 Divisor de corriente

El divisor de corriente se aplica en un nodo que contenga tres ramas de las cuales las dos ramas deben ser resistencias conocidas, tal como se muestra en la figura 1.13.

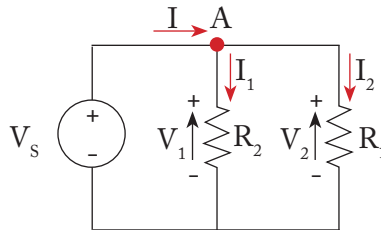


Figura 1.13. Circuito paralelo

En el nodo A de la figura 1.13, se aplica la Ley de Corrientes de Kirchoff (LCK) y la Ley de Ohm, en cada una de las resistencias R_1 y R_2 . Se asume que las corrientes que entran al nodo tienen signo positivo y las que salen tienen signo negativo.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$I = I_1 + I_2 \quad (1-24)$$

$$V_1 = R_1 I_1$$

Despejando la corriente I_1 , tenemos:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad (1-25)$$

$$V_2 = R_2 I_2$$

Despejando la corriente I_2 , tenemos:

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} \quad (1-26)$$

Las ecuaciones (1-25) y (1-26) se reemplaza en la ecuación (1-24):

$$I = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

Pero, $V_1 = V_2 = V_s$, debido a que están en paralelo.

$$I = \frac{V_s}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} = V_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V_s \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)$$

$$V_s = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1-27)$$

La ecuación (1-27) se reemplaza en la ecuación (1-25):

$$I_1 = \frac{1}{R_1} I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1-28)$$

La ecuación (1-27) se reemplaza en la ecuación (1-26):

$$I_2 = \frac{1}{R_2} I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1-29)$$

En conclusión, para calcular las corrientes I_1 e I_2 utilizando divisor de corriente, únicamente se aplican directamente las ecuaciones (1-28) y (1-29).

1.10 Teorema de Thévenin

El circuito de la figura 1.14 (a), presenta dos redes unidas (A y B). Supóngase que se necesita hacer solo un análisis parcial de la red A; se procede a separar esta red abriendo en los puntos a–b, entonces, queda como resultado el gráfico de la figura 1.14 (b).

El Teorema de Thévenin establece que cualquier circuito lineal activo (figura 1.14 (b)) con terminales de salida a y b puede sustituirse por un circuito equivalente, que consiste en solo una fuente independiente de voltaje llamada voltaje de Thévenin V_{TH} , conectada en serie con una resistencia de Thévenin R_{TH} (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988), tal como se indica en la figura 1.15.

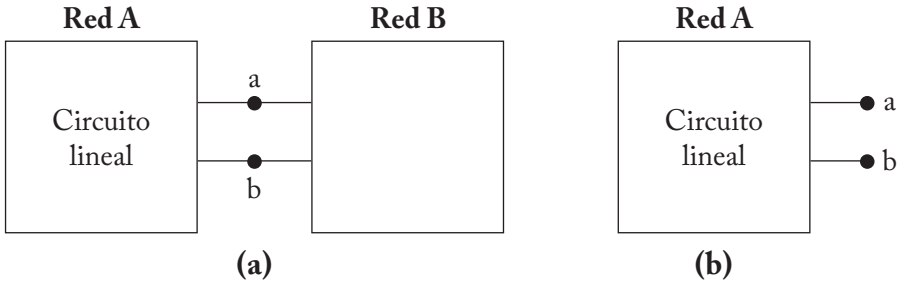


Figura 1.14. (a) La red A está unida a la red B en los puntos a-b.
(b) Red A, abierta en los puntos a-b.

Procedimiento para calcular el circuito equivalente de Thévenin

Considerando el circuito lineal de la figura 1.14 (b), se encuentran el voltaje de Thévenin V_{TH} y la resistencia de Thévenin R_{TH} , siguiendo los siguientes pasos:

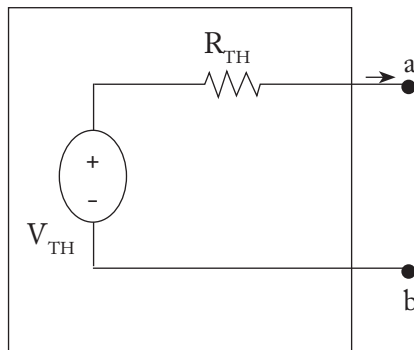


Figura 1.15. Circuito equivalente de Thévenin de la red A (figura 1.14 (b))

a) Cálculo del voltaje de Thévenin V_{TH}

Se procede a calcular el voltaje en los puntos a y b (V_{ab}) de la red A en la figura 1.14 (b), utilizando cualquier método circuital. El voltaje de Thévenin V_{TH} es igual al voltaje en los puntos a-b, $V_{TH} = V_{ab}$.

b) Cálculo de la resistencia de Thévenin R_{TH}

Para calcular la resistencia de Thévenin en los puntos a y b de la red A en la figura 1.14 (b), se hacen cero todas las fuentes independientes de voltaje y de corriente. Si en el circuito resultante solo quedan resistencias, se procede a calcular la resistencia equivalente en los puntos a y b (R_{ab}). La resistencia de Thévenin es igual a la resistencia en los puntos a-b, $R_{TH} = R_{ab}$.

Si en el circuito resultante existen fuentes dependientes, se procede a calcular la corriente de Norton (I_N), para finalmente calcular la resistencia de Thévenin por medio de la ecuación: $R_{TH} = V_{TH}/I_N$.

Ejemplo 1.8: Dado el circuito de la figura 1.16a (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 89), hallar el equivalente de Thévenin a la izquierda de los puntos a-b.

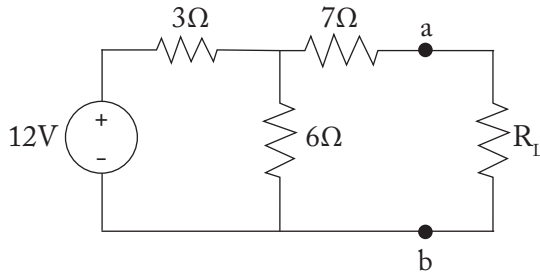


Figura 1.16a. Circuito resistivo simple dividido en dos redes, una a la izquierda y otra a la derecha de los puntos a y b

Solución:

De la figura 1.16a, tomamos el circuito que se encuentra a la izquierda de los puntos a-b, tal como se muestra en la figura 1.16b. Se procede a hallar el circuito equivalente de Thévenin siguiendo los siguientes pasos:

a) Cálculo del voltaje de Thévenin (V_{TH}) en los puntos a-b

Considerando el circuito de la figura 1.16b, se procede a calcular el voltaje de Thévenin en los puntos a y b. Como los terminales a-b se encuentran abiertos, por la resistencia de $7\ \Omega$ no circula corriente, el voltaje V_{ab} es igual al voltaje de la resistencia de $6\ \Omega$; así, aplicando divisor de voltaje se tiene:

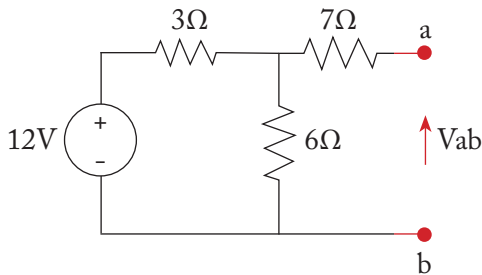


Figura 1.16b. Circuito resistivo simple con los terminales abiertos en el punto a-b, para calcular la tensión $V_{ab} = V_{TH}$

$$V_{ab} = V_{(6\Omega)} = 12 \frac{6}{3 + 6} = \frac{72}{9} = 8 \text{ Volt}$$

$$V_{TH} = V_{ab} = 8 \text{ Volt}$$

b) Cálculo de la resistencia de Thévenin (R_{TH})

Para calcular la R_{TH} , hacemos cero todas las fuentes independientes, tanto de voltaje como de corriente.

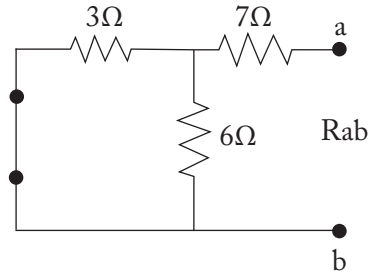


Figura 1.16c. Circuito resistivo simple con los terminales abiertos en los puntos a-b, para calcular la $R_{ab} = R_{TH}$

En el caso de la figura 1.16b, existe una fuente independiente de voltaje de 12V, que se hace cero (cortocircuito) como se muestra en la figura 1.16c, cuya resistencia R_{ab} equivalente es:

$$R_{ab} = \frac{(3)(6)}{3 + 6} + 7 = 9\Omega$$

$$R_{TH} = R_{ab} = 9$$

El circuito de la figura 1.16b se encuentra representado en el circuito equivalente de Thévenin incluida la resistencia de la carga R_L , tal como se muestra en la figura 1.16d.

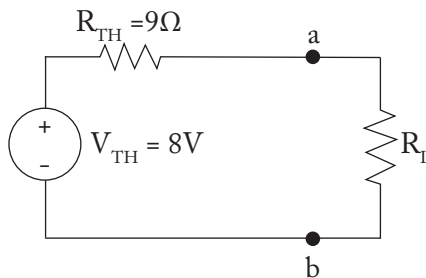


Figura 1.16d. Circuito equivalente de Thévenin en a y b, incluida la R_L

1.11 Teorema de Norton

El Teorema de Norton establece que cualquier circuito lineal activo, como el de la figura 1.14 (b) con terminales de salida a y b , puede sustituirse por un circuito equivalente que consiste en una fuente independiente de corriente I_N en paralelo con una resistencia R_N , representado en la figura 1.17.

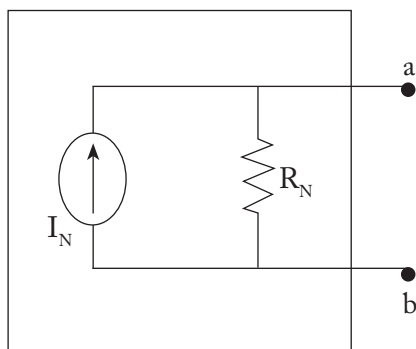


Figura 1.17. Circuito equivalente de Norton de la red A (figura 1.14 (b))

El procedimiento para calcular la corriente de Norton (I_N) es el siguiente: se cortocircuita en los puntos a y b ; la dirección de la I_N va dirigida de a hacia b . Posteriormente, se utiliza cualquier método circuital para calcular la corriente de Norton (I_N).

El procedimiento para calcular la resistencia de Norton es el mismo que se utiliza para calcular la resistencia de Thévenin, esto es, $R_N = R_{TH}$.

Ejemplo 1.9: Cálculo de la corriente de Norton en los puntos a y b del circuito de la figura 1.16b.

Solución:

Para calcular la corriente de Norton, se cortocircuita en los puntos a - b y la corriente I_N va dirigida de a hacia b , tal como se muestra en la figura 1.18. Se utiliza el método de análisis de mallas para encontrar el valor de I_N .

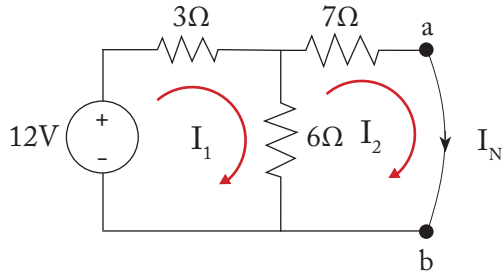


Figura 1.18. Circuito resistivo simple cortocircuitado en los puntos a-b y asignado una corriente I_N dirigida de a a b.

MALLA I

En el circuito de la figura 1.18, se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y, en cada elemento pasivo, se aplica la Ley de Ohm.

$$\begin{aligned} -12 + 3 I_1 + 6 (I_1 - I_2) &= 0 \\ -12 + 3 I_1 + 6 I_1 - 6 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$9 I_1 - 6 I_2 = 12 \quad (1-30)$$

MALLA II

En el circuito de la figura 1.18, se asume que la corriente de malla I_2 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_2 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y, en cada elemento pasivo, se aplica la Ley de Ohm.

$$\begin{aligned} 6 (I_2 - I_1) + 7 I_2 &= 0 \\ 6 I_2 - 6 I_1 + 7 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-6 I_1 + 13I_2 = 0$$

$$6 I_1 = 13 I_2$$

$$I_1 = \frac{13}{6} I_2 = 2,167 I_2$$

$$I_1 = 2.167 I_2 \quad (1-31)$$

La ecuación (1-31) se reemplaza en la ecuación (1-30):

$$9 (2,167 I_2) - 6 I_2 = 12$$

$$19,503 I_2 - 6 I_2 = 12$$

$$13,503 I_2 = 12$$

$$I_2 = \frac{12}{13,503} = 0,889 \text{ A}$$

$$I_N = I_2 = 0.889 \text{ A}$$

La resistencia de Norton es igual a la resistencia de Thévenin, que ya se calculó en el ejemplo 1.8; esto es:

$$R_N = R_{TH} = 9$$

El circuito de la figura 1.16b se representa con el circuito equivalente de Norton incluida la resistencia R_L , tal como se muestra en la figura 1.19.

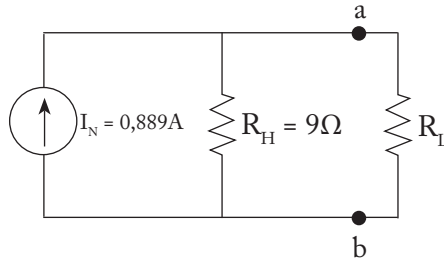


Figura 1.19. Circuito equivalente de Norton de la figura 1.16b, incluida la R_L .

1.12 Máxima transferencia de potencia

El circuito equivalente de Thévenin o de Norton permite saber la máxima transferencia de potencia que un circuito puede entregar a la carga, de acuerdo con Hayt Jr., Kemmerly (1988) y Durbin (2012: 152), esto ocurre cuando:

- El valor de la resistencia de la carga R_L debe ser igual al valor de la resistencia de Thévenin R_{TH} .
- El voltaje máximo en los puntos a-b es el voltaje de Thévenin V_{TH} , cuando la resistencia $R_L = \infty$.
- La corriente máxima que puede circular por la carga R_L es la corriente de Norton I_N .
- El teorema de la máxima transferencia de potencia es cuando $R_L = R_{TH}$; esto es:

$$P_L = \left(\frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2 R_L$$

Ejemplo 1.10: Como un ejemplo final, se considera una red que contiene una fuente dependiente, pero ninguna fuente independiente, tal como se muestra en la figura 1.20 (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 95).

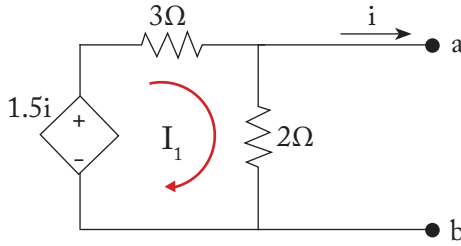


Figura 1.20. Una red que no contiene fuentes independientes.

Solución:

El circuito de la figura 1.20 no tiene ninguna fuente independiente, razón por la cual el voltaje de Thévenin es igual a cero ($V_{TH} = 0$). Para calcular la resistencia de Thévenin R_{TH} y debido a que existe una fuente dependiente de corriente, se utiliza un pequeño artificio. En los puntos a-b, se aplica una fuente independiente de corriente de 1A que entre por el punto de mayor potencial, en este caso el terminal *a*; se mide el voltaje en los terminales a-b (figura 1.21), luego se aplica la fórmula siguiente:

$$R_{TH} = \frac{V}{1}$$

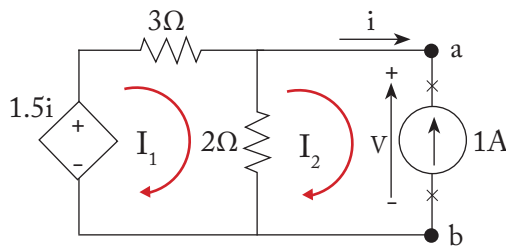


Figura 1.21. R_{TH} es numéricamente igual a *V*.

En la figura 1.21, se debe calcular el voltaje *V* en los puntos a-b (no es el de Thévenin) y la resistencia R_{TH} . Se utiliza el análisis de mallas, la fuente de corriente de 1A se abre. A continuación, se plantean las ecuaciones de mallas.

MALLA I

En el circuito de la figura 1.21, se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (-) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1 , se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la LVK y en cada elemento pasivo, se aplica la Ley de Ohm.

$$-1,5 i + 3 I_1 + 2 (I_1 - I_2) = 0$$

$$i = I_2$$

$$-1,5 I_2 + 3 I_1 + 2 I_1 - 2 I_2 = 0$$

$$5 I_1 - 3,5 I_2 = 0 \quad (1-33)$$

En la fuente de 1A,

$$I_2 = -1 \text{ A}$$

En la ecuación (1-33),

$$5 I_1 - 3,5 (-1) = 0$$

$$5 I_1 = -3,5$$

$$I_1 = -\frac{3,5}{5} = -0,7 \text{ A}$$

El voltaje V es igual al voltaje en la resistencia de 2Ω , aplicando la Ley de Ohm,

$$V = 2(I_1 - I_2) = 2[-0,7 - (-1)] = 0,6 \text{ V}$$

Se reemplazan valores en la ecuación (1-32),

$$R_{\text{TH}} = \frac{V}{1} = \frac{0,6}{1} = 0,6 \Omega$$

$$V_{TH} = 0$$

El circuito equivalente de Thévenin se encuentra en la figura 1.22.

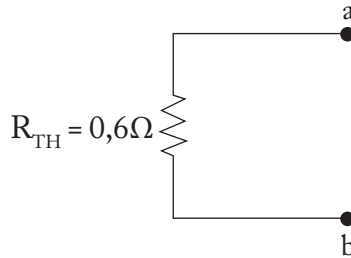


Figura 1.22. Circuito equivalente de la red de la figura 1.20

En el circuito de la figura 1.20, también se podría aplicar una fuente de voltaje de 1V y calcular la corriente i para obtener la resistencia de Thévenin; esto es,

$$R_{TH} = \frac{1}{i}$$

CAPÍTULO II FASORES

2.1 Introducción

La respuesta completa de un circuito eléctrico lineal se compone de dos partes: respuesta natural y respuesta forzada.

La respuesta natural o transitoria se produce durante un corto período de tiempo, esto es, cuando se abre o cierra un interruptor, cuando se arranca un motor, etc. La amplitud de esta señal transitoria se considera cero (la señal transitoria desaparece) cuando el tiempo ha transcurrido aproximadamente de 3τ a 5τ , siendo τ la constante de tiempo capacitivo o inductivo expresado en segundos.

La respuesta forzada se obtiene cuando la señal de un circuito ya se ha estabilizado, es decir, en condiciones de estado estable, que comprende un período de tiempo mayor a los 5τ . En esta parte se ampliará el conocimiento de lo que es la respuesta *forzada*, al considerar la función de excitación senoidal por medio de un simbolismo con números complejos, llamado transformación fasorial o simplemente fasor.

2.2 Las funciones senoidales

Se presenta las principales características de las funciones senoidales. Considérese un voltaje $v(t)$ que varía senoidalmente; esto es:

$$v_1(t) = V_m \text{ Sen } (wt) \quad (2-1)$$

La *amplitud* de la onda senoidal es V_m y su *argumento* es wt , con $w = \text{rad/seg}$ y $t = \text{seg}$.

En la figura 2.1, se encuentra la gráfica de la ecuación (2-1), el voltaje $v(t)$ en función del argumento wt .

La frecuencia angular w viene expresada en radianes por segundo (rad/seg).

La frecuencia f viene expresada en hertz (Hz) y es igual al inverso del período T .

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia angular w es igual a:

$$w = 2\pi f$$

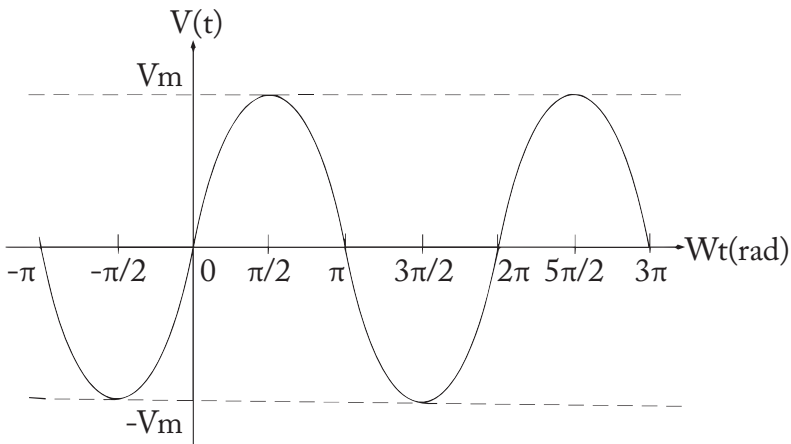


Figura 2.1. Gráfica de la función $v(t)$ contra wt .
 $V(t) = V_m \text{ Sen } wt$

Una forma más general de una función senoidal es la que se presenta en la ecuación (2-2).

$$v_2(t) = V_m \text{ Sen } (wt + \theta) \tag{2-2}$$

donde θ es el ángulo de desfase (es el ángulo desplazado a la derecha o izquierda a partir de 0 rad).

Las ecuaciones (2-1) y (2-2) se muestran en la gráfica de la figura 2.2, donde $V_m \text{ sen } (wt + \theta)$ adelanta a $V_m \text{ sen } wt$, por θ grados. También se puede decir que $V_m \text{ sen } wt$ atrasa a $V_m \text{ sen } (wt + \theta)$ en θ grados.

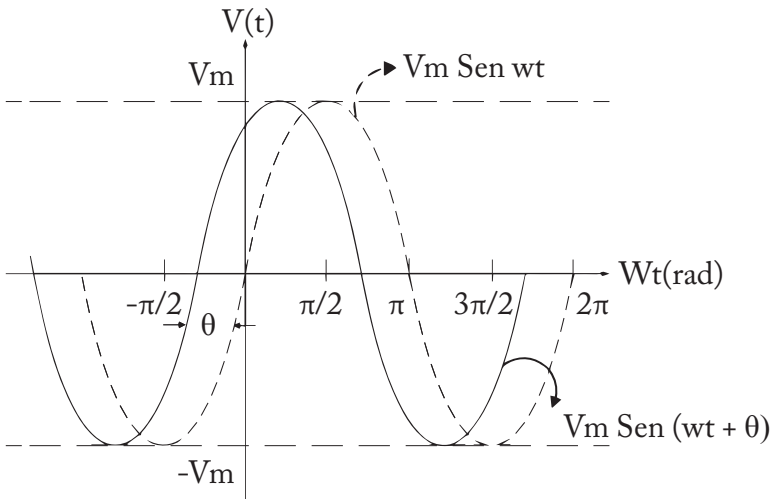


Figura 2.2. La onda $V_m \text{ Sen } (wt + \theta)$ adelanta a $V_m \text{ Sen } wt$ por θ rad.

En cualquiera de los dos casos, ya sea de adelanto o de atraso, se dice que las funciones senoidales están desfasadas; si los ángulos de fase son iguales, se dice que están en fase.

En la figura 2.3, se encuentran graficadas las ondas seno y coseno, esto es, $V_m \text{ Sen } wt$ y $V_m \text{ Cos } wt$, respectivamente. La onda coseno adelanta a la onda seno en 90° , razón por la cual podemos escribir las equivalencias que se presentan en las ecuaciones (2-3) y (2-4).

$$\text{Sen } wt = \text{Cos } (wt - 90^\circ) \tag{2-3}$$

$$\text{Cos } wt = \text{Sen } (wt + 90^\circ) \quad (2-4)$$

Realizando la demostración de la ecuación (2-4), tenemos:

$$\text{Sen } (wt + 90^\circ) = (\text{Sen } wt) (\text{Cos } 90^\circ) + (\text{Sen } 90^\circ) (\text{Cos } wt)$$

$$\text{Sen } (wt + 90^\circ) = (\text{Sen } wt) (0) + (1) (\text{Cos } wt)$$

$$\text{Sen } (wt + 90^\circ) = 0 + (\text{Cos } wt)$$

$$\text{Sen } (wt + 90^\circ) = \text{Cos } wt$$

Para comparar la fase de dos ondas senoidales, ambas deben escribirse como ondas seno o ambas como ondas coseno; además, las dos ondas deben escribirse con amplitudes positivas, y la frecuencia de las dos debe ser la misma. También es evidente que pueden sumarse o restarse múltiplos de 360° del argumento de cualquier función senoidal, sin alterar el valor de la función.

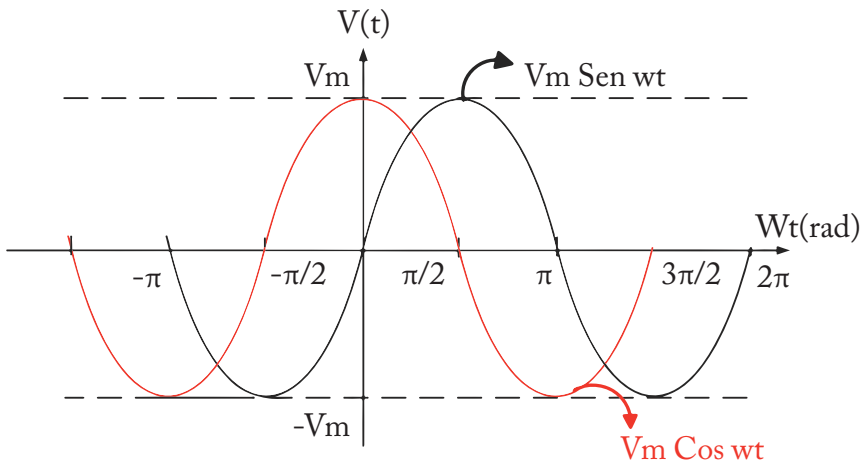


Figura 2.3 La onda seno ($V_m \text{ Sen } wt$) atrasa a la onda coseno ($V_m \text{ Cos } wt$) en 90°

Ejemplo:

Dos ondas de voltaje $v_3(t) = Vm_3 \text{ Sen } (wt - 60^\circ)$ y $v_4(t) = Vm_4 \text{ Cos } (wt + 15^\circ)$, ¿cuál de ellos atrasa con respecto a la otra y con cuántos grados?

Solución:

Para poder comparar las dos ondas de voltaje $v_3(t)$ y $v_4(t)$, ambas deben escribirse como ondas seno; para esto, la onda $v_4(t)$ se debe convertir a una onda seno, esto es:

$$\begin{aligned}v_4(t) &= Vm_4 \text{ Cos } (wt + 15^\circ) \\v_4(t) &= Vm_4 \text{ Sen } (wt + 15^\circ + 90^\circ) \\v_4(t) &= Vm_4 \text{ Sen } (wt + 105^\circ) \\v_3(t) &= Vm_3 \text{ Sen } (wt - 60^\circ)\end{aligned}$$

Ahora sí podemos decir que la onda $v_3(t)$ está atrasada con respecto a $v_4(t)$ por 165° ; o también es correcto decir que $v_4(t)$ adelanta a $v_3(t)$ por 165° .

2.3 Funciones de excitación senoidales

El inductor.- Es un elemento pasivo capaz de almacenar y entregar cantidades finitas de energía. A diferencia de una fuente ideal, este elemento no puede suministrar una cantidad ilimitada de energía o una potencia promedio finita sobre un intervalo de tiempo de duración infinita.

Michael Faraday y Joseph Henry descubrieron que un campo magnético variable podía inducir un voltaje en un circuito cercano; ellos mostraron que este voltaje era proporcional a la rapidez de cambio, con respecto al tiempo, de la corriente que producía el campo magnético (Hayt Jr y Kemmerly, 1988, p. 122) y viene definida por la siguiente fórmula:

$$v(t) \propto \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Donde L es la constante de proporcionalidad llamada inductancia, su unidad es el Henrio y su símbolo es H .

En la figura 2.4a, se muestra el símbolo para el inductor y, en la figura 2.4b, se muestra un circuito inductivo puro excitado por una fuente de corriente $i(t)$ que se muestra en la ecuación (2-5).

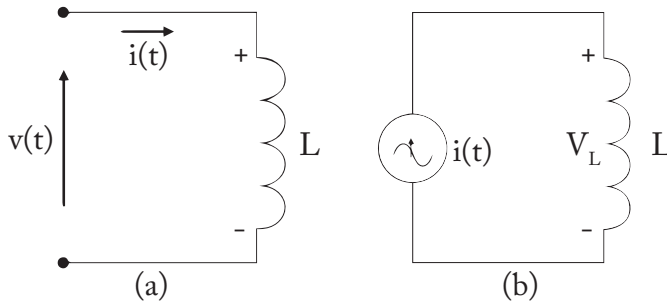


Figura 2.4. (a) Símbolo del inductor
 (b) Circuito inductivo puro

$$i(t) = I_m \cos wt \tag{2-5}$$

Considerando la definición del voltaje en el inductor y tomando en cuenta la corriente que circula por el inductor, tenemos:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{d}{dt} (I_m \cos wt) = L I_m (-\text{Sen } wt) w$$

$$v(t) = -w L I_m \text{ Sen } wt$$

Donde,

$$V_m = \omega L I_m$$

Se reemplaza,

$$v(t) = -V_m \text{Sen } \omega t$$

El signo negativo contribuye al ángulo con 180° ; esto es:

$$v(t) = V_m \text{Sen } (\omega t + 180^\circ) \quad (2-6)$$

Para convertir la ecuación (2-6) a una función coseno, se utiliza la ecuación (2-3):

$$v(t) = V_m \text{Cos } (\omega t + 180^\circ - 90^\circ)$$

$$v(t) = V_m \text{Cos } (\omega t + 90^\circ) \quad (2-7)$$

Comparando las ecuaciones de corriente (2-5) y de voltaje (2-7) en el inductor, existe un desfase de 90° entre las dos ondas; en donde la corriente atrasa al voltaje en 90° . En el gráfico de la figura 2.5, se muestra la onda de voltaje y corriente en el inductor.

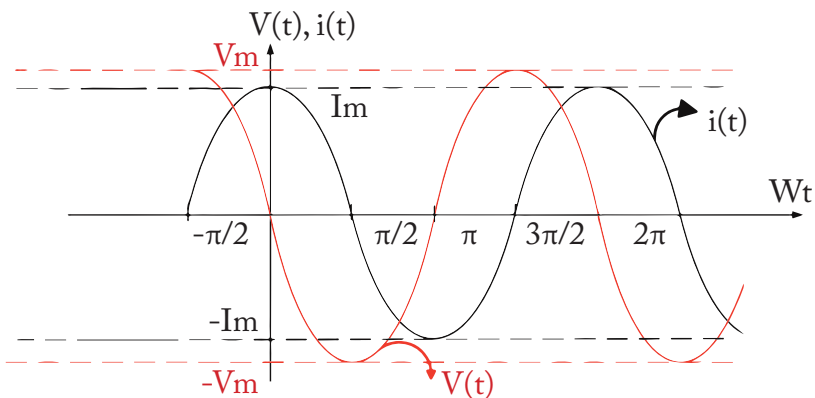


Figura 2.5. Gráfico de la onda de voltaje y corriente en el inductor desfasados 90° . La corriente atrasa al voltaje en 90° .

El capacitor.- Es un elemento pasivo capaz de almacenar y entregar cantidades finitas de energía. Por definición, la corriente que circula por el capacitor es:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

En la figura 2.6a, se muestra el símbolo para el capacitor y en la figura 2.6b, se muestra un circuito capacitivo puro excitado por una fuente de voltaje $v(t)$ que se muestra en la ecuación (2-8).

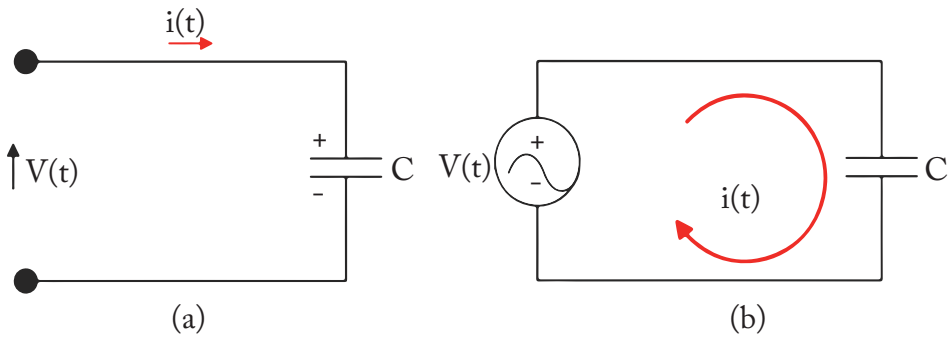


Figura 2.6. (a) Símbolo del capacitor
(b) Circuito capacitivo puro

$$v(t) = V_m \text{ Sen } \omega t \quad (2-8)$$

Considerando la definición de la corriente en el capacitor y tomando en cuenta el voltaje del capacitor, tenemos:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} (V_m \text{ Sen } \omega t) = C V_m (\text{Cos } \omega t) \omega$$

$$i(t) = \omega C V_m \text{ Cos } \omega t$$

Donde,

$$I_m = \omega C V_m$$

Se reemplaza,

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (2-9)$$

Para comparar las ecuaciones (2-8) y (2-9), ambas deben estar en senos o cosenos; en este caso, a la ecuación (2-9) la convertimos en una función seno. Para la conversión, utilizamos la ecuación (2-4):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (2-10)$$

Comparando las ecuaciones de corriente (2-10) y de voltaje (2-8) en el capacitor, existe un desfase de 90° entre las dos ondas; donde, la corriente adelanta al voltaje en 90° . En el gráfico de la figura 2.7, se muestra la onda de voltaje y corriente en el capacitor.

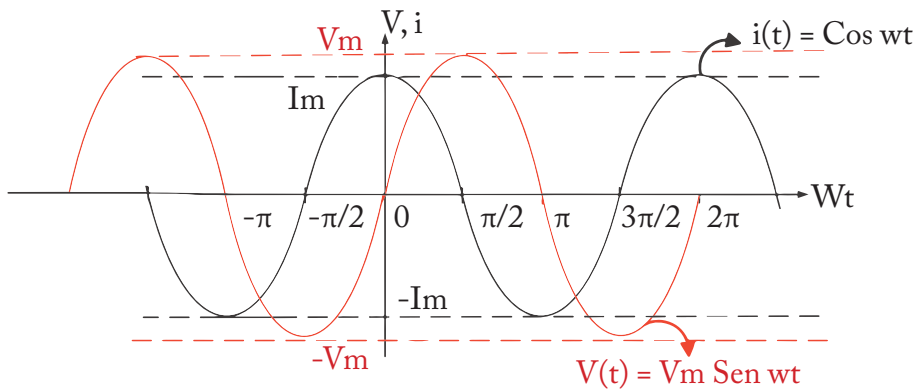


Figura 2.7. Gráfico de las ondas de voltaje y corriente en el capacitor, desfasadas 90° . La corriente adelanta al voltaje en 90° .

2.4 La función de excitación compleja

Números complejos.- El operador imaginario está representado por la letra j . Por definición $j^2 = -1$, por tanto, $j = \sqrt{-1}$.

Un número complejo (N) está representado por: $N = a + jb$; donde a y b son números reales. El número N tiene un componente real o parte real a , y un componente imaginario o parte imaginaria b . La figura 2.8 muestra el número N en el plano complejo.

La magnitud $|N|$, del número complejo N es:

$$|N|^2 = |a|^2 + |jb|^2 = a^2 + b^2$$

$$|N| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El ángulo del número complejo N es: $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$.

Un número complejo se puede representar de tres formas:

1) Forma rectangular

$$N = a + jb$$

2) Forma exponencial

$$N = |N| e^{j\theta}$$

3) Forma polar

$$N = |N| \angle \theta$$

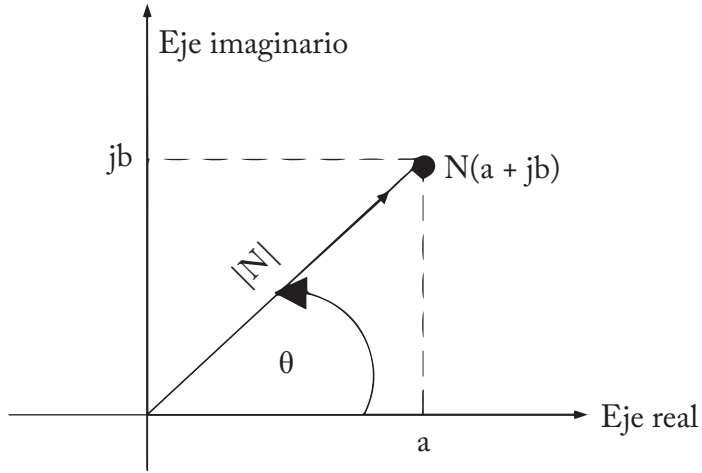


Figura 2.8. Número complejo $N = a + jb$ en el plano complejo

Circuito RL

En el circuito RL, en serie con una fuente de voltaje mostrado en la figura 2.9, se aplica un voltaje real:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{2-11}$$

Y se busca una respuesta real de corriente:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta).$$

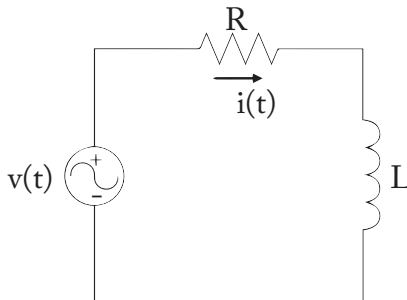


Figura 2.9. Un circuito RL en el estado senoidal permanente se analiza aplicándole una excitación compleja.

La ecuación (2-11) se escribe en forma compleja.

$$\mathbf{V} = V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (2-12)$$

La respuesta compleja resultante se expresa en términos de una amplitud desconocida I_m y un ángulo de fase desconocido β ; esto es:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j(\omega t + \beta)} \quad (2-13)$$

Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) al circuito de la figura 2.9, tenemos:

$$-v(t) + R i(t) + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt}$$

Escribiendo en forma compleja, tenemos:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + L \frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad (2-14)$$

Remplazando las ecuaciones (2-12) y (2-13) en la ecuación (2-14), tenemos:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = R I_m e^{j(\omega t + \beta)} + L \frac{d}{dt} \{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\}$$

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = R I_m e^{j(\omega t + \beta)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = \{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\} (R + j\omega L)$$

$$I_m e^{j(\omega t + \beta)} = \frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{R + j\omega L} e^{j(\omega t + \theta)} \quad (2-15)$$

La impedancia Z es igual a:

$$Z = R + j\omega L$$

Donde la amplitud o módulo es:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Y el ángulo,

$$\varphi = \text{Tan}^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

La impedancia escrita en forma exponencial es:

$$\mathbf{Z} = |Z| e^{j\varphi}$$

Se reemplaza en la ecuación (2-15), en forma exponencial,

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{|Z| e^{j\varphi}} e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{|Z|} e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}$$

Siendo,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\beta = \theta - \varphi$$

$$I = \text{Im } e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}$$

Aplicando la equivalencia de la ecuación de Euler y tomando la parte real, tenemos la corriente en función del tiempo.

$$i(t) = \text{Real } \{I\} = \text{Im } \text{Cos } (\omega t + \theta - \varphi)$$

$$i(t) = \text{Im } \text{Cos } (\omega t + \theta - \varphi) = \text{Im } \text{Cos } (\omega t + \beta)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Cos } (\omega t + \theta - \varphi)$$

$$\varphi = \text{Tan}^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

En la figura 2.10 se muestra el circuito RL en función del tiempo y en forma compleja, con las siguientes ecuaciones de voltaje y de corriente en estado estable o respuesta forzada:

$$v(t) = V_m \text{Cos } (\omega t + \theta)$$

$$V = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Cos } (\omega t + \theta - \varphi)$$

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t + \theta - \varphi)}$$

$$\varphi = \text{Tan}^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

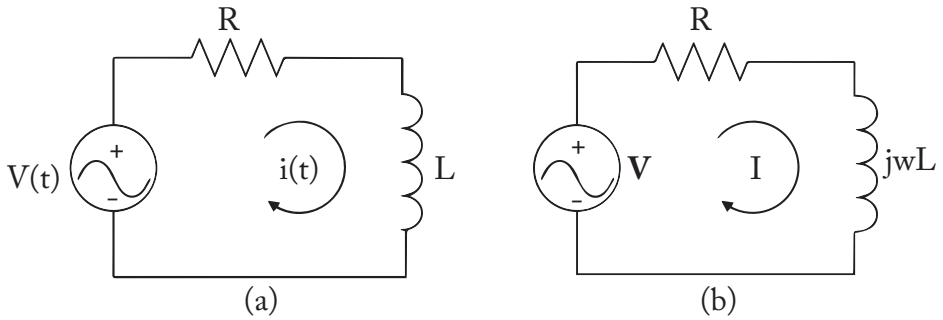


Figura 2.10. (a) Circuito RL en función de tiempo
 (b) Circuito RL en forma compleja

En la figura 2.11, se encuentran graficadas la función de excitación de voltaje $v(t) = V_m \cos \omega t$ aplicada (figura 2.10) y la respuesta de corriente $i(t) = I_m \cos (\omega t - \theta)$ resultante, donde la onda de corriente atrasa a la onda de voltaje en θ grados.

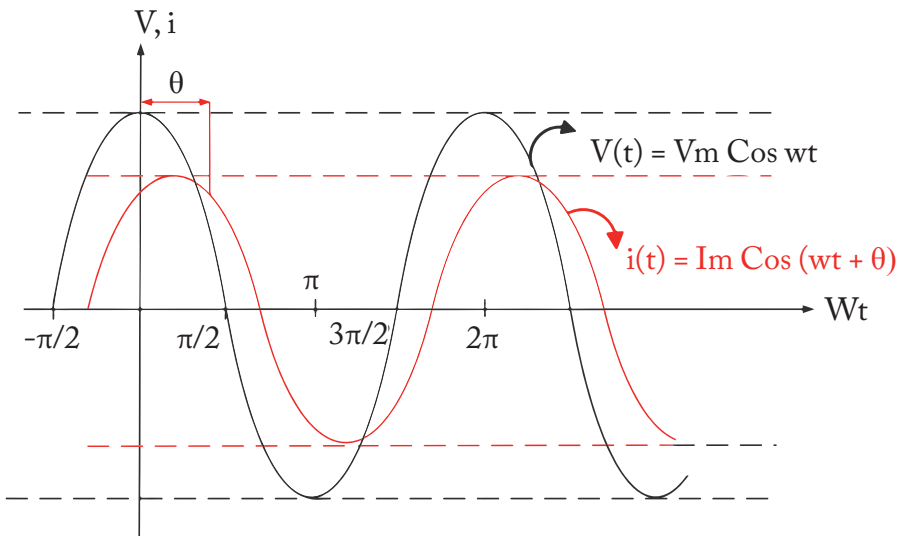


Figura 2.11. Función de excitación $v(t)$ aplicada y la respuesta de corriente $i(t)$ resultante. La corriente atrasa al voltaje en θ grados.

2.5 El fasor

En forma general, las ondas de voltaje y de corriente se caracterizan por una amplitud y un ángulo.

La representación de una función de excitación de voltaje en función del tiempo es:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

V representado en forma compleja es:

$$\mathbf{V} = V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (2-16)$$

De igual forma se representa la función de excitación de corriente, en función del tiempo y en forma compleja, respectivamente.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\mathbf{I} = I_m e^{j(\omega t + \beta)} \quad (2-17)$$

Representando en forma polar a las ecuaciones (2-16) y (2-17), en la que solo intervienen la amplitud y el ángulo de desfase, tenemos:

$$\mathbf{V} = V_m \angle \theta$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \beta$$

Esta representación compleja abreviada se llama **fasor**. El fasor se representa con letras negrillas.

Pasos para transformar en fasor una corriente o voltaje

- 1) Una corriente cosenoidal real $i(t)$.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$$

- 2) Se toma la parte real de una cantidad compleja.

$$i(t) = \text{Re} \{ \text{Im} e^{j(\omega t + \beta)} \}$$

- 3) Se representa la corriente como una cantidad compleja eliminando la instrucción Re (Real), tomando solo la parte real y eliminando el factor $e^{j\omega t}$.

$$\mathbf{I} = \text{Im} e^{j\beta}$$

Escribiendo el resultado en forma polar, tenemos:

$$\mathbf{I} = \text{Im} \angle \beta$$

Esta representación compleja abreviada es la *representación fasorial*. Los fasores son cantidades complejas que solo tienen amplitud y fase.

Se utiliza a $i(t)$ como la representación en el dominio del tiempo y se llama al fador \mathbf{I} como la representación en el dominio de la frecuencia.

El proceso por el cual $i(t)$ se transforma en \mathbf{I} recibe el nombre de transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Para realizar la transformación a una función fasorial, la corriente $i(t)$ o voltaje $v(t)$ siempre debe ser una función coseno, debido a que la parte real de una función exponencial (función de Euler) es un coseno. Para convertir una función seno a una función coseno, se utiliza la identidad que se muestra en la ecuación (2-3). A continuación, se presentan tres ejemplos de transformación de una función.

Ejemplo 1: Transformar el voltaje $v(t)$ en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (fador).

$$v(t) = 120 \text{ Cos} (\omega t - 60^\circ)$$

$$\mathbf{V} = 120 \angle -60^\circ$$

Ejemplo 2: Transformar la corriente $i(t)$ en el dominio del tiempo, al dominio de la frecuencia.

$$i(t) = 80 \text{ Sen } (wt + 216^\circ)$$

Para transformar la corriente $i(t)$ a fasor \mathbf{I} , la función $i(t)$ debe estar en forma de $\cos wt$. Utilizando la identidad de la ecuación (2-3), tenemos:

$$\text{Sen } wt = \text{Cos } (wt - 90^\circ)$$

Se reemplaza,

$$i(t) = 80 \text{ Cos } (wt + 216^\circ - 90^\circ)$$

$$i(t) = 80 \text{ Cos } (wt + 126^\circ)$$

$$\mathbf{I} = 80 \angle 126^\circ$$

Ejemplo 3: Transformar el voltaje fasorial $\mathbf{V} = 120 \angle -75^\circ$, al dominio del tiempo.

$$\mathbf{V} = 120 \angle -75^\circ$$

$$v(t) = 120 \text{ Cos } (wt - 75^\circ)$$

2.6 Relaciones fasoriales

Los parámetros de la resistencia R , la inductancia L y la capacitancia C , que se encuentran en un circuito de corriente alterna, para pasar a un circuito en formato fasorial, se obtienen de los siguientes circuitos:

2.6.1 Circuito resistivo

En el dominio del tiempo.- En el circuito resistivo que se muestra en la figura 2.12, se le aplica una señal de excitación cosenoidal de voltaje $v(t)$ en el dominio del tiempo, para obtener como respuesta la corriente que va a circular por la resistencia R . Partimos con la ecuación de voltaje:

$$v(t) = V_m \cos \omega t \quad (2-18)$$

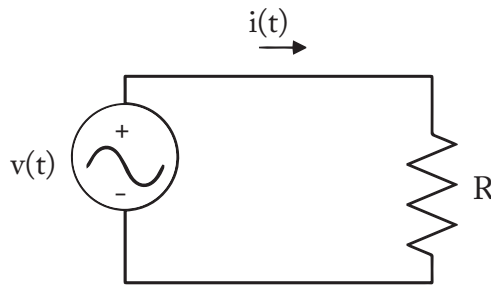


Figura 2.12. Circuito resistivo puro en el dominio del tiempo, $v(t) = R i(t)$.

Se aplica la Ley de Ohm en la resistencia R :

$$v(t) = R i(t)$$

Despejando la corriente y reemplazando el voltaje de la ecuación (2-18), tenemos:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \cos \omega t$$

Donde,

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$

Entonces,

$$i(t) = I_m \cos wt \quad (2-19)$$

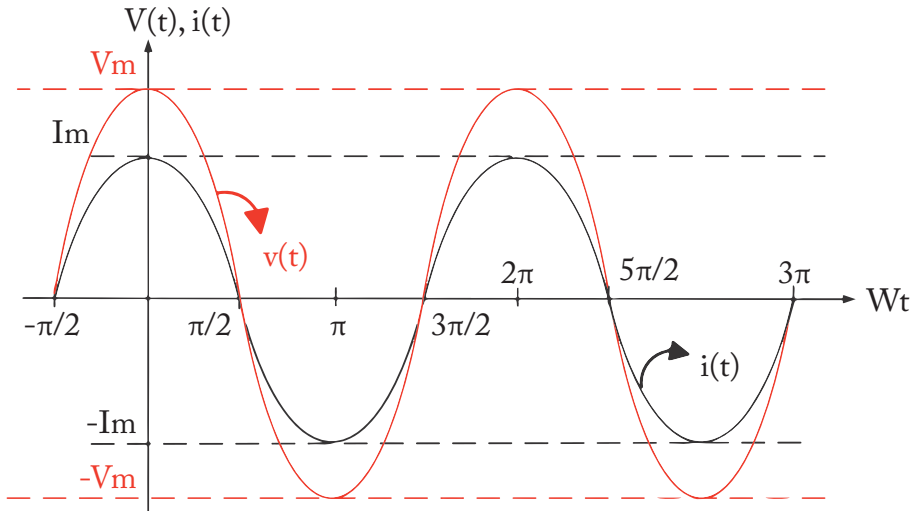


Figura 2.13. Las ondas de corriente $i(t)$ y voltaje $v(t)$ están en fase.

En la figura 2.13, se muestra la gráfica de las ondas de voltaje y de corriente que se encuentran en las ecuaciones (2-18) y (2-19) respectivamente. Comparando las dos ecuaciones, estas se encuentran en fase; es decir, el ángulo de desfase es de cero grados. Además, la amplitud de la corriente I_m es menor que la amplitud del voltaje V_m para valores de resistencia R mayores que 1.

Forma compleja.- La ecuación de voltaje (2-18) se le escribe en formato exponencial y polar respectivamente.

$$V = V_m e^{j\omega t}$$

$$V = V_m \angle 0^\circ$$

De igual manera, la ecuación de corriente (2-19) se le escribe en formato exponencial y polar, respectivamente:

$$\mathbf{I} = \text{Im } e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{I} = \text{Im} \angle 0^\circ$$

Aplicando la Ley de Ohm en forma fasorial en la resistencia R , tenemos:

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R = \mathbf{Z} = \text{impedancia}$$

Entonces, en el dominio de la frecuencia, la resistencia pasa como R , tal como se muestra en la figura 2.14.

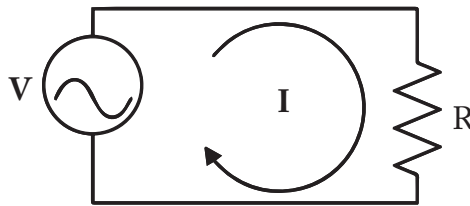


Figura 2.14. Circuito resistivo puro en el dominio de la Frecuencia, $\mathbf{V} = R \mathbf{I}$

2.6.2 Circuito inductivo

En el dominio del tiempo.- En el circuito inductivo que se muestra en la figura 2.15, se aplica una señal de excitación cosenoidal de corriente $i(t)$ en el dominio del tiempo, para obtener como respuesta el voltaje $V_L(t)$ en el inductor L .

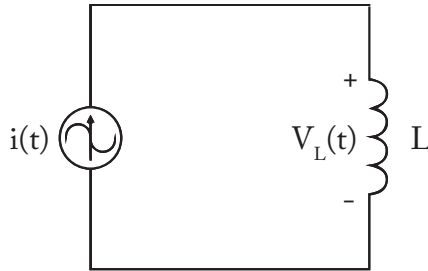


Figura 2.15. Circuito inductivo puro en el dominio del tiempo, $V_L(t) = \frac{di(t)}{dt}$

Por definición, el voltaje en el inductor es:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Siendo,

L la inductancia e $i(t)$ la corriente que se indica en la ecuación (2-19),

$$V_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$V_L(t) = L \frac{d}{dt} (I_m \cos \omega t) = -L I_m \omega \sin \omega t$$

Siendo $V_m = \omega L I_m$

$$V_L(t) = -V_m \sin \omega t$$

El signo negativo (-) contribuye únicamente con el argumento de 180°

$$V_L(t) = V_m \sin (\omega t + 180^\circ)$$

Convirtiendo a una función coseno, donde $\sin \omega t = \cos (\omega t - 90^\circ)$:

$$V_L(t) = V_m \cos(\omega t + 180^\circ - 90^\circ)$$

$$V_L(t) = V_m \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (2-20)$$

En la figura 2.16, se muestra la gráfica de las ondas de corriente y de voltaje que se encuentran en las ecuaciones (2-19) y (2-20) respectivamente. Comparando las dos ecuaciones, estas se encuentran desfasadas en 90° , es decir, el ángulo de desfase es de noventa grados. La onda de corriente atrasa en 90° a la onda de voltaje.

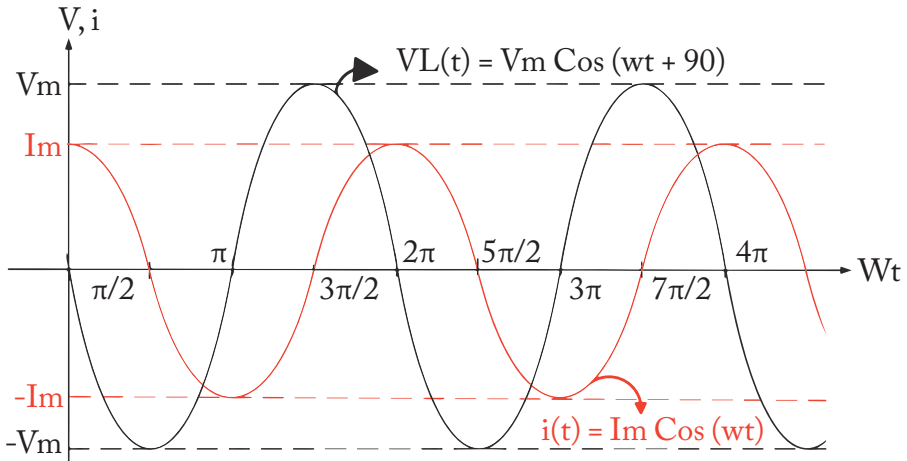


Figura 2.16. La onda de corriente $i(t)$ y de voltaje $v_L(t)$ están desfasadas 90° . La corriente atrasa al voltaje en 90° .

Forma compleja. - Para convertir el circuito de la figura 2.15 a formato fasorial, la ecuación de la corriente (2-19) se expresa en forma compleja y en forma exponencial:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\omega t}$$

El voltaje en el inductor, en forma fasorial:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} L \operatorname{Im} j\omega e^{j\omega t}$$

$$V_L = j\omega L \operatorname{Im} e^{j\omega t}$$

$$V_L = j\omega L I$$

$$\frac{V_L}{I} = j X_L = Z_L$$

Donde,

$$Z_L = j X_L$$

$$X_L = \omega L$$

X_L = reactancia inductiva

Z_L = impedancia inductiva

$$Z_L = R + j X_L$$

Entonces, en el dominio de la frecuencia, la impedancia Z_L pasa como $j\omega L$ y viene expresada en Ohmios, tal como se muestra en la figura 2.17.

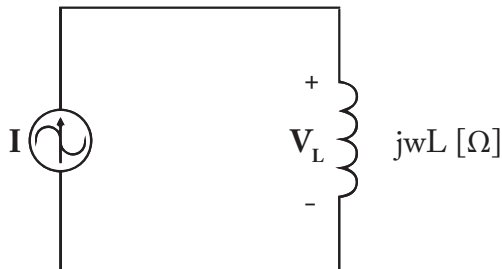


Figura 2.17. Circuito inductivo puro en el dominio de la frecuencia, $V_L = Z_L I = j\omega L I$

2.6.3 Circuito capacitivo

En el dominio del tiempo.- En el circuito capacitivo que se muestra en la figura 2.18, se aplica una señal de excitación cosenoidal de voltaje $v(t) = V_m \text{Cos } \omega t$ en el dominio del tiempo, para obtener como respuesta la corriente en el capacitor C .

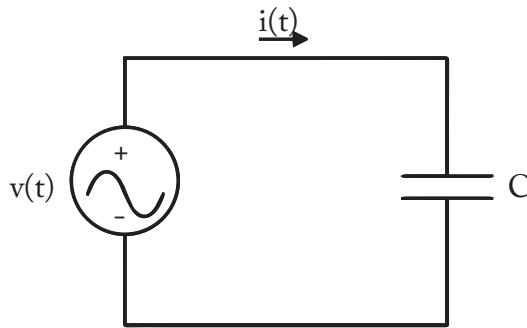


Figura 2.18. Circuito capacitivo puro en el dominio del tiempo, $i(t) = C \frac{dv}{dt}$

Por definición, la corriente en el capacitor es:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} (V_m \text{Cos } \omega t)$$

$$i(t) = -C V_m \omega \text{Sen } \omega t$$

El signo negativo (-) contribuye únicamente con el argumento de 180° :

$$i(t) = C V_m \omega \text{Sen } (\omega t + 180^\circ)$$

Se convierte a una función coseno, donde $\text{Sen } \omega t = \text{Cos } (\omega t - 90^\circ)$:

$$i(t) = \omega C V_m \cos(\omega t + 180^\circ - 90^\circ)$$

$$i(t) = \omega C V_m \cos(\omega t + 90^\circ)$$

Donde,

$$I_m = \omega C V_m$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (2-21)$$

En la figura 2.19, se muestra la gráfica de las ondas de voltaje y de corriente que se encuentran en las ecuaciones (2-18) y (2-21). Comparando las dos ecuaciones, estas se encuentran desfasadas en 90° ; es decir, el ángulo de desfase es de 90° . La onda de corriente adelanta en 90° a la onda de voltaje.

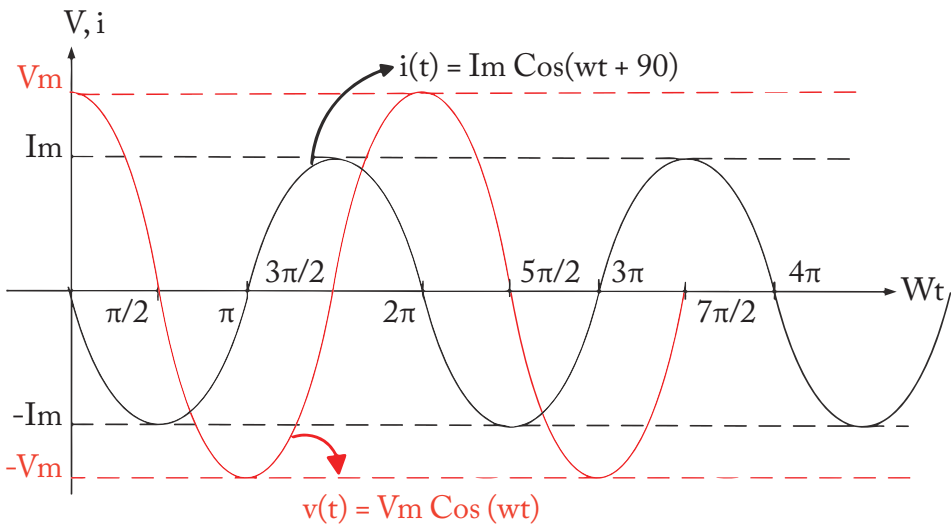


Figura 2.19. Las ondas de corriente y voltaje están desfasadas 90° .
La corriente adelanta al voltaje en 90° .

Forma compleja.- Para convertir el circuito de la figura 2.18 a formato fasorial, la ecuación de voltaje (2-18) se expresa en forma compleja y en forma exponencial:

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\omega t}$$

Por definición, la corriente en el capacitor en forma compleja es:

$$\mathbf{I} = C \frac{d\mathbf{V}}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_m e^{j\omega t})$$

$$\mathbf{I} = j\omega C V_m e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V}$$

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = Z_C$$

$$Z_C = -jX_C$$

Donde,

X_C = reactancia capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Z_C = impedancia capacitiva

Entonces, en el dominio de la frecuencia, la impedancia Z_C pasa como $-j \frac{1}{\omega C}$ y viene expresada en Ohmios, tal como se muestra en la figura 2.20.

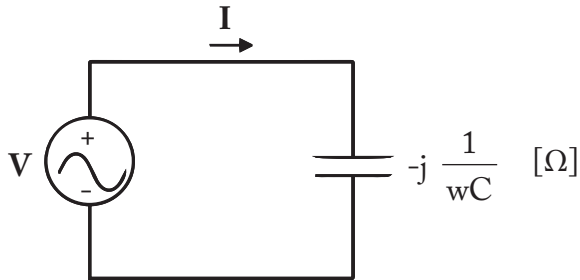


Figura 2.20. Circuito inductivo puro en el dominio de la frecuencia, $V = Z_c I = -j \frac{1}{\omega C} I$

2.6.4 Impedancia y admitancia

La impedancia está representada por la letra Z . En forma rectangular, tiene un componente resistivo o resistencia R y un componente reactivo o reactancia X , esto es:

$$Z = R \pm jX$$

$$Z_L = R + jXL$$

$$Z_C = R - jXc$$

En forma polar, tiene una amplitud y un ángulo

$$Z = |Z| \angle \theta$$

Siendo,

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{X}{R}$$

La admitancia Y se define como el inverso de la impedancia:

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z}$$

Escribiendo en forma rectangular,

$$Y = G + jB$$

Donde,

G = conductancia , su unidad es el Siemens, y su símbolo S

$$S = \frac{A}{V} = \Omega^{-1}$$

B = susceptancia y, su unidad es el Siemens

En forma polar,

$$Y = |Y| \angle \alpha$$

$$\alpha = \text{Tan}^{-1} \frac{B}{G}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}$$

Aplicando conjugada,

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{y} \quad B = -j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

La reactancia X puede ser inductiva o capacitiva.

En la figura 2.21, se muestran las relaciones de impedancia y admitancia.

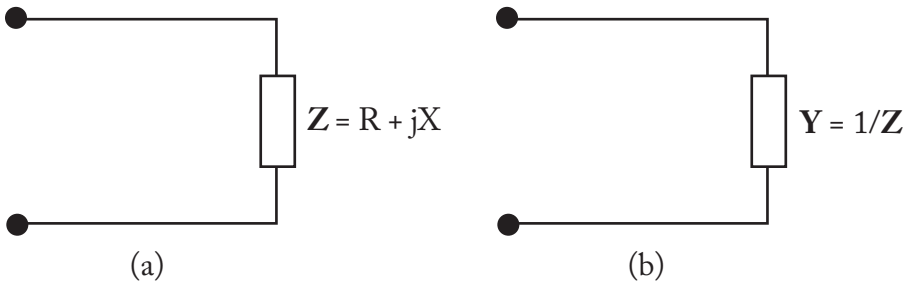


Figura 2.21. (a) Impedancia Z . (b) Admitancia Y

2.7 Diagramas fasoriales

El diagrama fasorial se grafica en el plano complejo, que está constituido por una parte real y una parte imaginaria. Como los voltajes y corrientes fasoriales son números complejos, pueden representarse también como puntos en el plano complejo. A continuación, se presenta el voltaje fasorial V_1 en formato rectangular y polar, el cual se muestra en la figura 2.22.

$$V_1 = 6 + j9 = 10.82 \angle 56.31^\circ$$

$$V_1 = 10.82 \angle 56.31^\circ$$

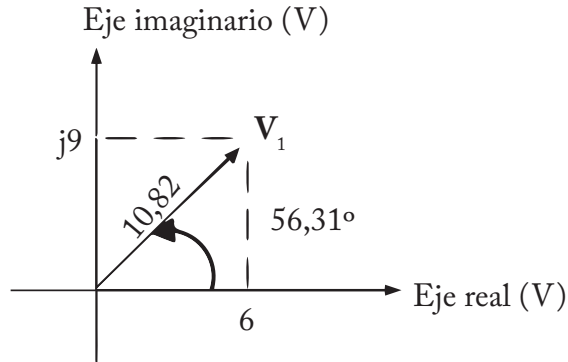


Figura 2.22. Diagrama fasorial de $V_1 = 6 + j9 = 10.82 \angle 56.31^\circ$

El voltaje fasorial V_1 se localiza por medio de una flecha dibujada desde el origen (0,0) hasta el punto de coordenadas (6,9), siendo 10.82 la magnitud y 56.31° el ángulo.

Con los fasores de voltajes V_1 y V_2 , se procede a realizar la suma y resta de estos dos fasores, los cuales se muestran en la figura 2.23.

$$V_1 = 6 + j9$$

$$V_2 = 4 - j3$$

Suma:

$$V_s = V_1 + V_2 = (6 + j9) + (4 - j3) = 10 + j6$$

$$V_s = 10 + j6$$

$$V_s = 11.7 \angle 31.0^\circ$$

Resta:

$$V_R = V_1 - V_2 = (6 + j9) - (4 - j3) = 6 + j9 - 4 + j3$$

$$\mathbf{V}_R = 2 + j12$$

$$\mathbf{V}_R = 12.2 \angle 80.5^\circ$$

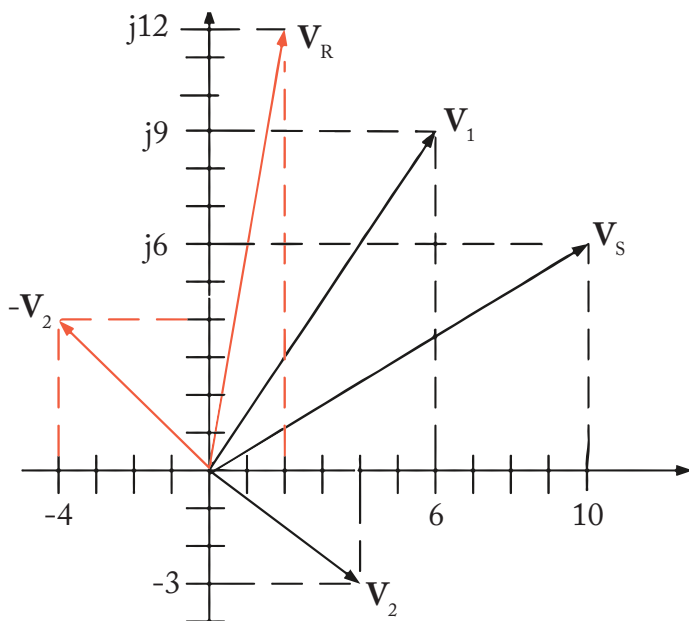


Figura 2.23. Diagrama fasorial de la suma $\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$
y la resta $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$

El diagrama fasorial también ofrece una interpretación de la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

La presente obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, geometría y trigonometría, con el único propósito de ayudarlos en el aprendizaje para resolver problemas de circuitos eléctricos.

El desarrollo de los cinco capítulos teóricos se basa en la experiencia del autor como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, tomando como base los argumentos teóricos de varios autores, especialmente William H. Hayt Jr. y Jack E. Kemmerly.

El capítulo 1 comprende el análisis de los circuitos en corriente continua y estado estable, utilizando los métodos de análisis de nodos, análisis de mallas, divisores de corriente, divisores de voltaje, transformaciones de fuentes de corriente y de voltaje, superposición, teoremas de Thévenin y de Norton.

El capítulo 2 trata del análisis de los circuitos eléctricos en corriente alterna y en estado estable, usando los fasores para la resolución de los problemas y utilizando los diferentes métodos del capítulo 1.

El capítulo 3 comprende el análisis de la potencia promedio y valores eficaces, referenciados a potencias bajas y medias, utilizando el triángulo de potencias para su resolución.

El capítulo 4 se refiere al análisis de circuitos trifásicos con cargas balanceadas.

Finalmente, en el capítulo 5 se contempla el análisis de circuitos acoplados magnéticamente y transformadores.

Pedro Infante Moreira nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

ISBN: 978-9942-14-181-1



9 789942 141811

